CAPÍTULO 3

Aplicaciones de la derivada

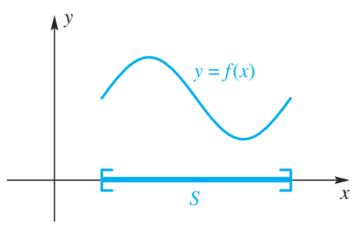
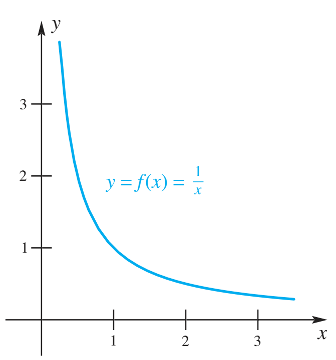


Figura 1



En $(0, \infty)$, no hay máximo ni mínimo
En $[1, 3]$, máximo = 1, mínimo = $\frac{1}{3}$
En $(1, 3]$, no hay máximo, mínimo = $\frac{1}{3}$

Figura 2

3.1 Máximos y mínimos

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la *mejor* manera de hacer algo. Por ejemplo, un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un médico desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Entonces suponga que se nos da una función $f(x)$ y un dominio S como en la figura 1. Ahora planteamos tres preguntas:

1. ¿$f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en S?
2. Si tiene un valor máximo o un valor mínimo, ¿dónde se alcanzan?
3. Si existen, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo?

Dar respuesta a estas tres interrogantes es el principal objetivo de esta sección. Empezamos por introducir un vocabulario preciso.

Definición

Suponga que S, el dominio de f, contiene el punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es el **valor máximo** de f en S, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en S;
(ii) $f(c)$ es el **valor mínimo** de f en S, si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en S;
(iii) $f(c)$ es el **valor extremo** de f en S, si es un valor máximo o un valor mínimo;
(iv) la función que queremos maximizar o minimizar es la **función objetivo.**

La cuestión de la existencia

¿f tiene un valor máximo (o mínimo) en S? La respuesta depende, sobre todo, del conjunto S. Considere $f(x) = 1/x$ en $S = (0, \infty)$; no tiene valor máximo ni mínimo (véase la figura 2). Por otra parte, la misma función en $S = [1, 3]$ tiene el valor máximo de $f(1) = 1$ y el valor mínimo de $f(3) = \frac{1}{3}$. En $S = (1, 3]$, f no tiene valor máximo y el valor mínimo es $f(3) = \frac{1}{3}$.

La respuesta también depende del tipo de función. Considere la función discontinua g (véase la figura 3) definida por

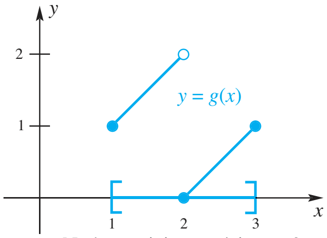
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

En $S = [1, 3]$, g no tiene valor máximo (se acerca arbitrariamente a 2, pero nunca lo alcanza). Sin embargo, g tiene el valor mínimo $g(2) = 0$.

Existe un teorema preciso que responde la pregunta de existencia para muchos problemas que se presentan en la práctica. Aunque intuitivamente es obvio, una demostración rigurosa es muy difícil, la dejamos para textos más avanzados de cálculo.

Teorema A Teorema de existencia de máximo y mínimo

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.



No hay máximo, mínimo = 0

Figura 3

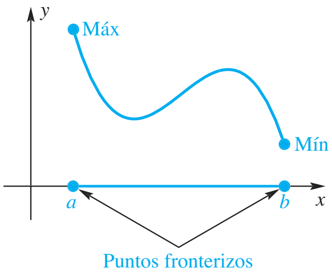


Figura 4

Observe las palabras clave en el teorema A; se requiere que f sea *continua* y que el conjunto S sea un *intervalo cerrado*.

¿En dónde se presentan los valores extremos? Por lo común, la función objetivo tendrá un intervalo I como su dominio. Pero este intervalo puede ser de cualquiera de los nueve tipos estudiados en la sección 0.2. Algunos de ellos contienen sus puntos finales (puntos fronterizos); algunos no. Por ejemplo, $I = [a, b]$ contiene ambos puntos fronterizos; $[a, b)$ sólo contiene su punto fronterizos izquierdo; (a, b) no contiene ninguno de sus puntos fronterizos (véase la figura 4).

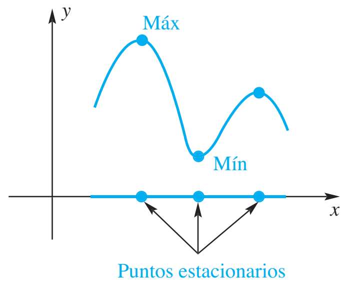


Figura 5

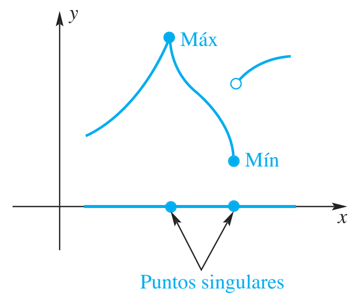


Figura 6

Si c es un punto en el que $f'(c) = 0$, lo llamamos **punto estacionario**. El nombre proviene del hecho de que un punto estacionario de la gráfica se coloca en una trayectoria horizontal, puesto que la recta tangente es horizontal. A menudo, los valores extremos aparecen en los puntos estacionarios (véase la figura 5).

Por último, si c es un punto interior de I, en donde f' no existe, decimos que c es un **punto singular**. Es un punto en donde la gráfica de f tiene una esquina, una tangente vertical, quizás un salto, o cerca del cual la gráfica oscila de manera abrupta. Los valores extremos pueden aparecer en puntos singulares (véase la figura 6), aunque en problemas prácticos esto es muy raro.

Estas tres clases de puntos (fronterizos, estacionarios y singulares) son los puntos clave en la teoría de máximos y mínimos. Cualquier punto de uno de estos tres tipos, en el dominio de una función f, se denomina **punto crítico** de f.

EJEMPLO 1 Encuentre los puntos críticos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN Los puntos fronterizos son $-\frac{1}{2}$ y 2. Para determinar los puntos estacionarios, resolvemos $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$, para x, obteniendo 0 y 1. No existen puntos singulares. Por lo tanto, los puntos críticos son $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2. ■

Teorema B Teorema de los puntos críticos

Sea f definida en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, c es alguno de los siguientes:

(i) un punto fronterizo de I;

(ii) un punto estacionario de f; es decir, un punto en donde $f'(c) = 0$; o

(iii) un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe.

Demostración Primero considere el caso en donde $f(c)$ es el valor máximo de f en I y suponga que c no es un punto fronterizo ni un punto singular. Debemos demostrar que c es un punto estacionario.

Ahora, como $f(c)$ es el valor máximo, $f(x) \leq f(c)$ para toda x en I; esto es,

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Por consiguiente, si $x < c$, de modo que $x - c < 0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{1}$$

mientras que si $x > c$, entonces

$$(2) \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Pero $f'(c)$ existe porque c no es un punto singular. En consecuencia, cuando hacemos $x \to c^-$ en (1) y $x \to c^+$ en (2), obtenemos, respectivamente, $f'(c) \geq 0$ y $f'(c) \leq 0$. Concluimos que $f'(c) = 0$, como se quería.

El caso en donde $f(c)$ es el valor mínimo se maneja de forma análoga. ■

En la demostración que se acaba de dar, utilizamos el hecho de que la desigualdad $\leq$ se preserva bajo la operación de tomar límites.

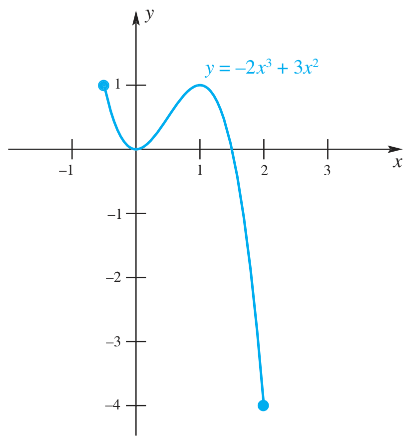


Figura 7

Terminología
Observe la manera en que los términos se utilizan en el ejemplo 3. El máximo es 1, que es igual a $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $f(1)$. Decimos que el máximo se alcanza en $-\frac{1}{2}$ y en 1. De manera análoga, el mínimo es –4, que se alcanza en 2.

¿Cuáles son los valores extremos? En vista de los teoremas A y B, ahora podemos establecer un procedimiento muy sencillo para determinar los valores máximo y mínimo de una función continua f en un *intervalo cerrado I*.

Paso 1: Encuentre los puntos críticos de f en I.

Paso 2: Evalúe f en cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el más pequeño es el valor mínimo.

EJEMPLO 2 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3$ en $[-2, 2]$.

SOLUCIÓN La derivada de $f'(x) = 3x^2$, que está definida en $(-2, 2)$ y es cero sólo en $x = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 0$ y los puntos fronterizos $x = -2$ y $x = 2$. Al evaluar f en los puntos críticos se obtiene $f(-2) = -8$, $f(0) = 0$ y $f(2) = 8$. Por lo tanto, el valor máximo de f es 8 (que se alcanza en $x = 2$) y el mínimo es -8 (que se alcanza en $x = -2$). ■

Observe que en el ejemplo 2, $f'(0) = 0$, pero f no alcanza un mínimo o un máximo en $x = 0$. Esto no contradice al teorema B. Éste no dice que si c es un punto crítico, entonces $f(c)$ es un mínimo o un máximo; dice que si $f(c)$ es un mínimo o un máximo, entonces c es un punto crítico.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 identificamos $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2 como los puntos críticos. Ahora $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y $f(2) = -4$. Así, el valor máximo es 1 (que se alcanza en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$), y el valor mínimo es -4 (que se alcanza en $x = 2$). La gráfica de f se muestra en la figura 7. ■

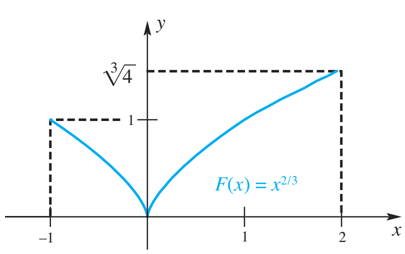


Figura 8

EJEMPLO 4 La función $F(x) = x^{2/3}$ es continua en todas partes. Encuentre sus valores máximo y mínimo en $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN $F'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, nunca es cero. Sin embargo, $F'(0)$ no existe, de modo que 0 es un punto crítico, así como los puntos fronterizos -1 y 2. Ahora, $F(-1) = 1$, $F(0) = 0$ y $F(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$. Por consiguiente, el valor máximo es $\sqrt[3]{4}$; el valor mínimo es 0. La gráfica se muestra en la figura 8. ■

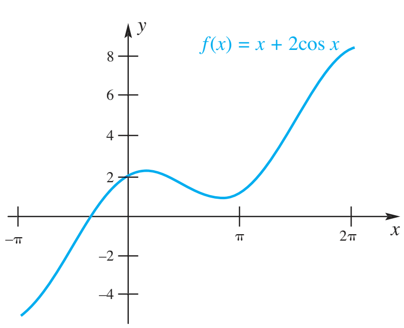


Figura 9

EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x + 2 \cos x$ en $[-\pi, 2\pi]$.

SOLUCIÓN La figura 9 muestra una gráfica de $y = f(x)$. La derivada es $f'(x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x$, que está definida en $(-\pi, 2\pi)$ y es cero cuando $\operatorname{sen} x = 1/2$. Los únicos valores de x en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ que satisfacen $\operatorname{sen} x = 1/2$ son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Estos dos números, junto con los puntos fronterizos $-\pi$ y 2π, son los puntos críticos. Ahora, evalúe f en cada punto crítico:

$$f(-\pi) = -2 - \pi \approx -5.14 \qquad f(\pi/6) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.26$$

$$f(5\pi/6) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} \approx 0.89 \qquad f(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8.28$$

Por lo tanto, $-2-\pi$ es el mínimo (que se alcanza en $x=-\pi$) y el máximo es $2+2\pi$ (que se alcanza en $x=2\pi$). ■

Revisión de conceptos

1. Una función ________ en un intervalo ________ siempre tendrá un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

2. El término valor ________ denota un valor máximo o uno mínimo.

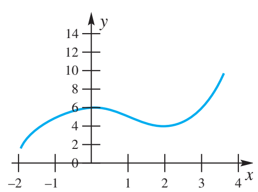
3. Una función puede alcanzar un valor extremo sólo en un punto crítico. Los puntos críticos son de tres tipos: ________, ________ y ________.

4. Un punto estacionario para f es un número c tal que ________; un punto singular para f es un número c tal que ________.

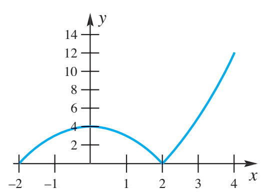
Conjunto de problemas 3.1

En los problemas del 1 al 4 determine todos los puntos críticos y encuentre el mínimo y el máximo de la función. Cada función tiene dominio $[-2, 4]$.

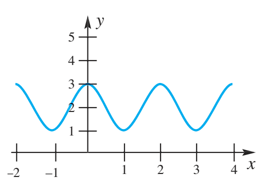
1.



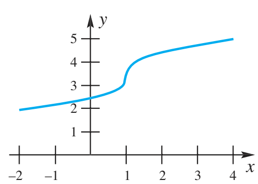
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 26 identifique los puntos críticos y encuentre los valores máximo y mínimo en el intervalo dado.

5. $f(x) = x^2 + 4x + 4; I = [-4, 0]$

6. $h(x) = x^2 + x; I = [-2, 2]$

7. $\Psi(x) = x^2 + 3x; I = [-2, 1]$

8. $G(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x); I = [-3, 3]$

9. $f(x) = x^3 - 3x + 1; I = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

10. $f(x) = x^3 - 3x + 1; I = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$

11. $h(r) = \dfrac{1}{r}; I = [-1, 3]$

12. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}; I = [-3, 1]$

13. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2; I = [-2, 2]$

14. $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x - 1; I = [-3, 2]$

15. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}; I = (-\infty, \infty)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

16. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}; I = [-1, 4]$

17. $r(\theta) = \operatorname{sen}\theta; I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

18. $s(t) = \operatorname{sen} t - \cos t; I = [0, \pi]$

19. $a(x) = |x - 1|; I = [0, 3]$

20. $f(s) = |3s - 2|; I = [-1, 4]$

21. $g(x) = \sqrt[3]{x}; I = [-1, 27]$

22. $s(t) = t^{2/5}; I = [-1, 32]$

23. $H(t) = \cos t; I = [0, 8\pi]$

24. $g(x) = x - 2 \operatorname{sen} x; I = [-2\pi, 2\pi]$

25. $g(\theta) = \theta^2 \sec\theta; I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

26. $h(t) = \dfrac{t^{5/3}}{2 + t}; I = [-1, 8]$

GC **27.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

GC **28.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = \cos x + x \operatorname{sen} x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

En los problemas del 29 al 36 haga un bosquejo de la gráfica de una función con las propiedades que se dan.

29. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x=3$) y un mínimo de 0 (cuando $x=0$). Además, $x=5$ es un punto estacionario.

30. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x=6$) y un mínimo de -2 (cuando $x=1$). Además, $x=2, 3, 4, 5$ son puntos estacionarios.

31. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x=5$) y un mínimo de 2 (cuando $x=3$). Además, $x=1$ y $x=5$ son los únicos puntos estacionarios.

32. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x=4$) y un mínimo de 2 (cuando $x=2$). Además, f no tiene puntos estacionarios.

33. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (que se obtiene en dos valores diferentes de x, ninguno de los cuales es un punto fronterizo) y un mínimo de 1 (que se alcanza en tres valores diferentes de x, exactamente uno de los cuales es un punto fronterizo).

34. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 0$) y un mínimo de 0 (cuando $x = 6$). Además, f tiene dos puntos estacionarios y dos puntos singulares en $(0, 6)$.

35. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza un máximo.

36. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza ni máximo ni mínimo.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; cerrado **2.** extremo **3.** puntos fronterizo; puntos estacionarios; puntos singulares **4.** $f'(c) = 0$; $f'(c)$ no existe.

3.2 Monotonía y concavidad

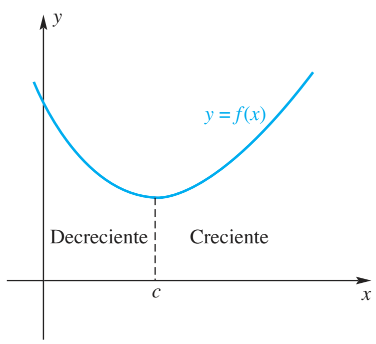


Figura 1

Considere la gráfica en la figura 1. Nadie se sorprendería cuando decimos que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c. Pero, para asegurar que coincidimos en la terminología, damos definiciones precisas.

Definición

Sea f definida en un intervalo I (abierto, cerrado o ninguno de los dos). Decimos que:

(i) f es **creciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f es **decreciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) f es **estrictamente monótona** en I, si es creciente en I o es decreciente en I.

¿Cómo decidiremos en dónde es creciente una función? Alguien podría sugerir que dibujemos su gráfica y la veamos. Pero, por lo regular, una gráfica se dibuja al trazar algunos puntos y conectarlos mediante una curva suave. ¿Quién puede asegurar que la gráfica no oscila entre los puntos trazados? Incluso, los sistemas de álgebra computacional y las calculadoras gráficas lo hacen conectando puntos. Necesitamos un procedimiento mejor.

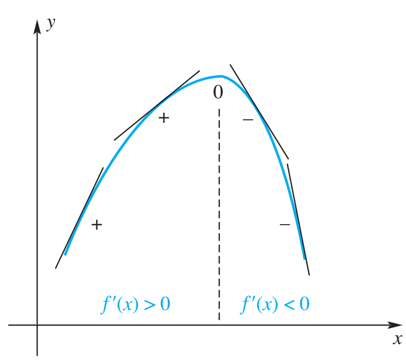


Figura 2

La primera derivada y monotonía Recuerde que la primera derivada $f'(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x. Por lo tanto, si $f'(x) > 0$ entonces la recta tangente asciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es creciente. (Véase la figura 2.) De manera análoga, si $f'(x) < 0$, la recta tangente desciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es decreciente. También podemos observar esto en términos de movimiento a lo largo de una línea. Suponga que un objeto está en la posición $s(t)$ en el instante t y que su velocidad siempre es positiva, esto es, $s'(t) = ds/dt > 0$. Entonces, parece razonable que el objeto continúe moviéndose a la derecha mientras la derivada siga siendo positiva. En otras palabras, $s(t)$ será una función *creciente* de t. Estas observaciones no demuestran el teorema A, pero hacen creíble el resultado. Posponemos una demostración rigurosa hasta la sección 3.6.

Teorema A Teorema de monotonía

Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x interior a I, entonces f es creciente en I.
(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x interior a I, entonces f es decreciente en I.

Por lo regular, este teorema nos permite determinar con precisión en dónde una función derivable es creciente y en dónde es decreciente. Es cuestión de resolver dos desigualdades.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, encuentre en dónde f es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar la derivada de f,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

Necesitamos determinar en dónde

$$(x+1)(x-2) > 0$$

y también en dónde

$$(x+1)(x-2) < 0$$

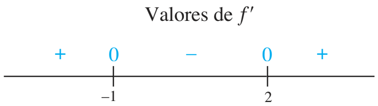


Figura 3

Este problema fue estudiado con mayor detalle en la sección 0.2, que vale la pena revisar ahora. Los puntos de separación son -1 y 2; éstos dividen al eje x en tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al utilizar los puntos de prueba -2, 0 y 3, concluimos que $f'(x) > 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $f'(x) < 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 3). Así, por el teorema A, f es creciente en $(-\infty, -1]$ y en $[2, \infty)$, es decreciente en $[-1, 2]$. Observe que el teorema nos permite incluir los puntos fronterizos de estos intervalos, aunque $f'(x) = 0$ en esos puntos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. ■

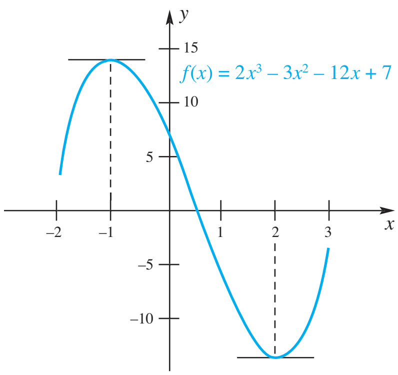


Figura 4

EJEMPLO 2 Determine en dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN

$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$$

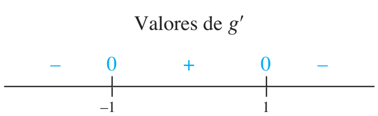


Figura 5

Como el denominador siempre es positivo, $g'(x)$ tiene el mismo signo que el numerador $(1 - x)(1 + x)$. Los puntos de separación, -1 y 1, determinan los tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Cuando los probamos, encontramos que $g'(x) < 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $g'(x) > 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 5). Con base en el teorema A, concluimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$ y que es creciente en $[-1, 1]$. Posponemos la graficación de g para más adelante; pero si quiere ver la gráfica, vaya a la figura 11 y al ejemplo 4. ■

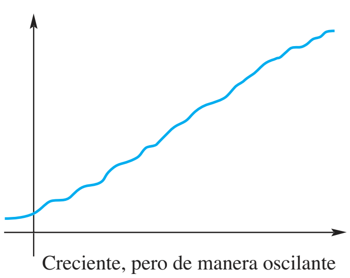


Figura 6

La segunda derivada y concavidad Una función puede crecer y también tener una gráfica que oscila mucho (véase la figura 6). Para analizar oscilaciones, necesitamos estudiar cómo gira la recta tangente cuando nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica. Si la recta tangente gira constantemente en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que la gráfica es *cóncava hacia arriba* (o simplemente cóncava); si la tangente gira en el mismo sentido que las manecillas del reloj, la gráfica es *cóncava hacia abajo* (o *convexa*). Ambas definiciones se formulan mejor en términos de funciones y sus derivadas.

> **Definición**
>
> Sea f derivable en un intervalo abierto I. Decimos que f (al igual que su gráfica) es **cóncava hacia arriba (cóncava)** en I, si f' es creciente en I; y decimos que f es **cóncava hacia abajo (convexa)** en I, si f' es decreciente en I.

Los diagramas en la figura 7 ayudarán a aclarar estas nociones. Obsérvese que una curva que es cóncava *hacia arriba* tiene forma parecida a una *copa*.

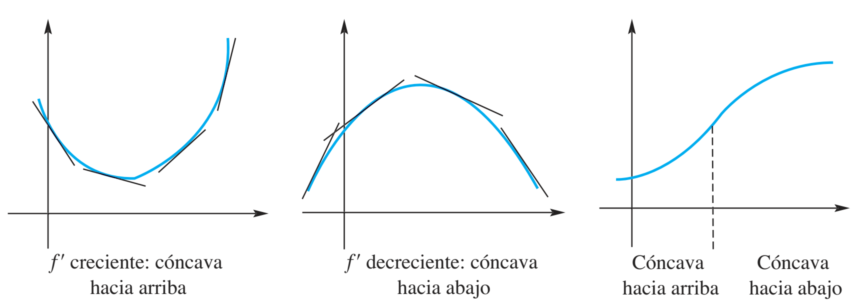


Figura 7

Condiciones en los teoremas A y B

Las condiciones que consideran a las derivadas en los teoremas A y B son suficientes para garantizar las conclusiones que se establecen. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias. Es posible que una función sea creciente en algún intervalo, aunque la derivada no siempre sea positiva en ese intervalo. Si consideramos la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-4, 4]$, notamos que es creciente pero su derivada no siempre es positiva en ese intervalo ($f'(0) = 0$). La función $g(x) = x^4$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $[-4, 4]$, pero la segunda derivada, $g''(x) = 12x^2$, no siempre es positiva en ese intervalo.

En vista del teorema A, tenemos un criterio sencillo para decidir en dónde una curva es cóncava (hacia arriba) y en dónde es cóncava hacia abajo (convexa). Basta con tener en mente que la segunda derivada de f es la primera derivada de f'. Por lo que, f' es creciente si f'' es positiva; es decreciente si f'' es negativa.

Teorema B **Teorema de concavidad**

Sea f dos veces derivable en el intervalo abierto I.

(i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava (hacia arriba) en I.

(ii) Si $f'' < 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava hacia abajo (convexa) en I.

Para la mayoría de las funciones, este teorema reduce el problema de determinar concavidad al problema de resolver desigualdades. En esto somos expertos.

EJEMPLO 3 ¿En dónde $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

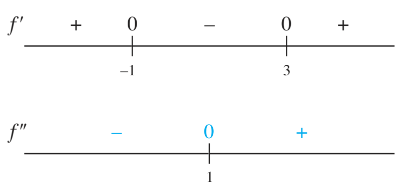


Figura 8

Al resolver las desigualdades $(x+1)(x-3) > 0$ y su opuesta, $(x+1)(x-3) < 0$, concluimos que f es creciente en $(-\infty, -1]$ y $[3, \infty)$ y decreciente en $[-1, 3]$ (véase la figura 8). De manera análoga, al resolver $2(x-1) > 0$ y $2(x-1) < 0$ se muestra que f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$. La gráfica de f se muestra en la figura 9. ■

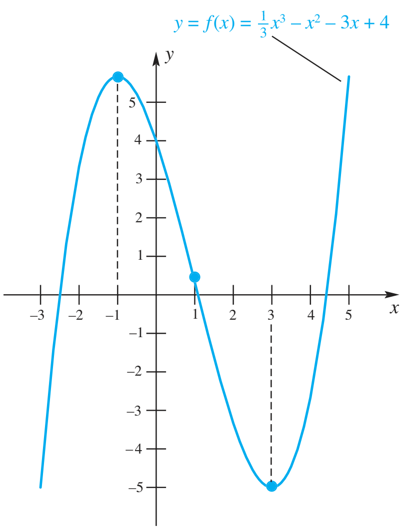


Figura 9

EJEMPLO 4 ¿En dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN Comenzamos nuestro estudio de esta función en el ejemplo 2. Allí, aprendimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ y creciente en $[-1, 1]$. Para analizar la concavidad, calculamos g''.

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{(1 + x^2)[(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(4x)]}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} \\ &= \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} \end{aligned}$$

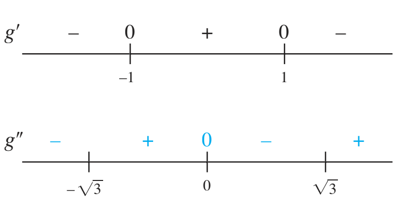


Figura 10

Como el denominador siempre es positivo, sólo necesitamos resolver $x(x^2 - 3) > 0$ y su opuesta. Los puntos de separación son $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$. Estos tres puntos de separación determinan cuatro intervalos. Después de probarlos (véase la figura 10), concluimos que g es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y que es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

Para bosquejar la gráfica de g, hacemos uso de toda la información obtenida hasta el momento, más el hecho de que g es una función impar cuya gráfica es simétrica respecto al origen (véase la figura 11).

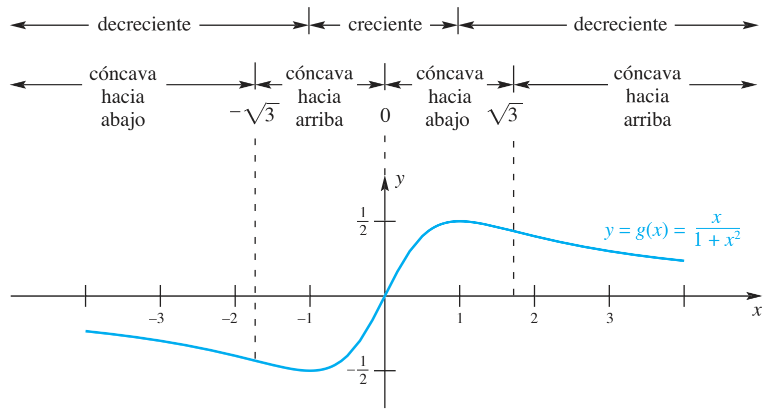


Figura 11

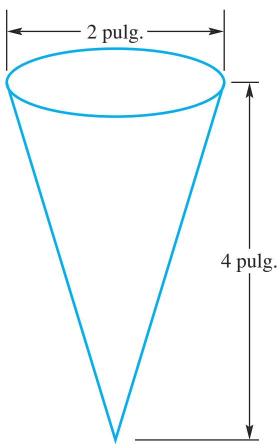


Figura 12

EJEMPLO 5 Suponga que se vierte agua en un depósito cónico, como se muestra en la figura 12, a una razón constante de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo. Determine la altura h como función del tiempo t y dibuje $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el depósito está lleno.

SOLUCIÓN Antes de que resolvamos este problema, reflexionemos en cómo se verá la gráfica. Al principio, la altura aumentará con rapidez, ya que se necesita muy poca agua para llenar la parte inferior del cono. Conforme se va llenando el depósito, la altura aumentará menos rápido. ¿Qué sugieren estos enunciados con respecto a la función $h(t)$, su derivada $h'(t)$ y su segunda derivada $h''(t)$? Como el agua se vierte de manera constante, la altura siempre aumentará, de modo que $h'(t)$ será positiva. La altura aumentará más lentamente conforme se eleva el nivel. Por consiguiente, la función $h'(t)$ está disminuyendo, de modo que $h''(t)$ es negativa. Por lo tanto, la gráfica de $h(t)$ es creciente —ya que $h'(t)$ es positiva— y cóncava hacia abajo —pues $h''(t)$ es negativa.

Ahora, una vez que tenemos una idea intuitiva sobre cómo debe verse la gráfica (creciente y cóncava hacia abajo), resuelva este problema de manera analítica. El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde V, r y h son funciones del tiempo. Las funciones h y r están relacionadas; observe los triángulos semejantes en la figura 13. Al utilizar las propiedades de triángulos semejantes tenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{4}$$

Así, $r = h/4$. Por esto, el volumen del agua dentro del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3$$

Por otro lado, como el agua está fluyendo al interior del contenedor a una razón de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo, el volumen en el instante t es $V = \frac{1}{2}t$, donde t se mide en segundos. Al igualar estas dos expresiones para V se obtiene

$$\frac{1}{2}t = \frac{\pi}{48}h^3$$

Cuando $h = 4$, tenemos $t = \frac{2\pi}{48}4^3 = \frac{8}{3}\pi \approx 8.4$; así, toma alrededor de 8.4 segundos para que se llene el depósito. Ahora se despeja h en la ecuación anterior que relaciona h y t para obtener

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t}$$

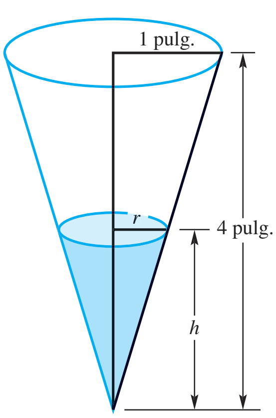


Figura 13

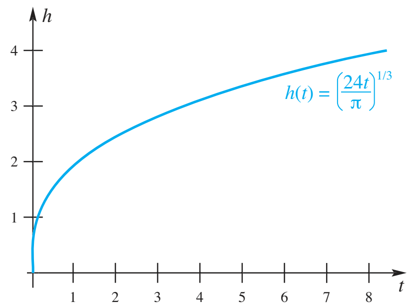


Figura 14

La primera y segunda derivadas de h son

$$h'(t) = D_t\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{24}{\pi}t\right)^{-2/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}}$$

que es positiva, y

$$h''(t) = D_t\frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{9\pi t^5}}$$

que es negativa. La gráfica de $h(t)$ se muestra en la figura 14. Como se esperaba, la gráfica de h es creciente y cóncava hacia abajo. ■

EJEMPLO 6 Una agencia de noticias reportó en mayo de 2004 que el desempleo en Asia oriental estaba aumentando en forma continua a una tasa creciente. Por otra parte, el precio del alimento estaba aumentando, pero a una tasa más lenta que antes. Interprete estos enunciados en términos de funciones crecientes/decrecientes y concavidad.

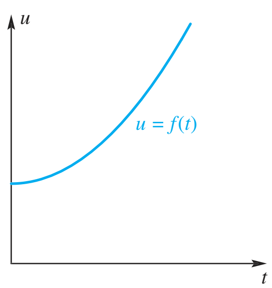


Figura 15

SOLUCIÓN Sea $u = f(t)$ el número de personas desempleadas en el instante t. Aunque en realidad u salta en cantidades enteras, seguiremos una práctica estándar al representar a u por medio de una curva suave, como en la figura 15. Decir que el desempleo está aumentando es decir que $du/dt > 0$. Decir que está aumentando a una tasa creciente es decir que la función du/dt está *creciendo*; pero esto significa que la derivada de du/dt debe ser positiva. Por lo tanto, $d^2u/dt^2 > 0$. En la figura 15, observe que la pendiente de la recta tangente aumenta conforme t aumenta. El desempleo es creciente y cóncavo hacia arriba.

De forma similar, si $p = g(t)$ representa el precio del alimento (por ejemplo, el costo común de comestibles diarios para una persona) en el instante t, entonces dp/dt es positiva pero *decreciente*. Por lo tanto, la derivada de dp/dt es negativa, por lo que $d^2p/dt^2 < 0$. En la figura 16, observe que la pendiente de la recta tangente disminuye conforme t aumenta. El precio del alimento está aumentando, pero es cóncavo hacia abajo. ■

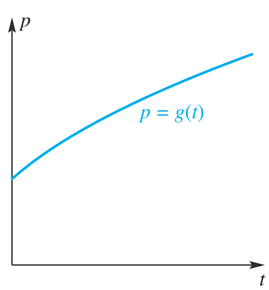


Figura 16

Puntos de inflexión Sea f continua en c. Llamamos a $(c, f(c))$ un **punto de inflexión** de la gráfica de f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo del otro lado de c. La gráfica en la figura 17 indica varias posibilidades.

Terminología
Mientras que el mínimo o el máximo de una función es un *número*, un punto de inflexión siempre es una *pareja ordenada* $(c, f(c))$.

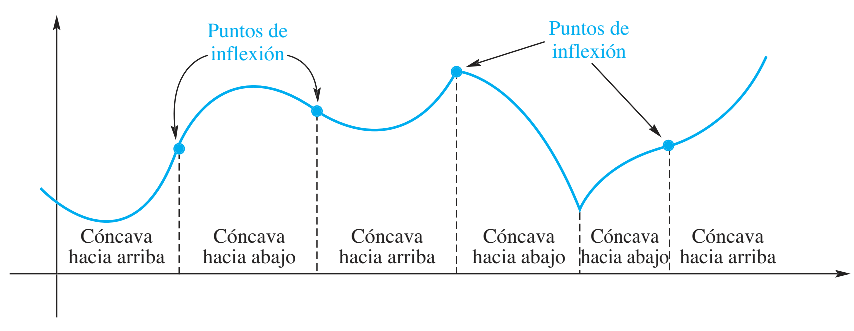


Figura 17

Como usted podría suponer, los *puntos en donde $f''(x) = 0$ o donde $f''(x)$ no existe son candidatos a puntos de inflexión*. Utilizamos la palabra *candidato* de manera deliberada. Al igual que un candidato a un cargo político puede fracasar en una elección, también, por ejemplo, un punto en donde $f''(x) = 0$ puede fracasar en ser un punto de inflexión. Considere $f(x) = x^4$, que tiene la gráfica mostrada en la figura 18. Es cierto que $f''(0) = 0$, pero el origen no es un punto de inflexión. Por lo tanto, para buscar los puntos de inflexión empezamos por identificar los puntos en donde $f''(x) = 0$ (y en donde $f''(x)$ no existe). Después verificamos para ver si en realidad son puntos de inflexión.

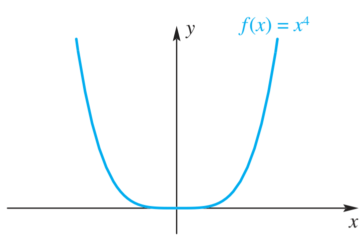


Figura 18

Regresemos a la gráfica del ejemplo 4. Verá que tiene tres puntos de inflexión. Éstos son $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4\right)$.

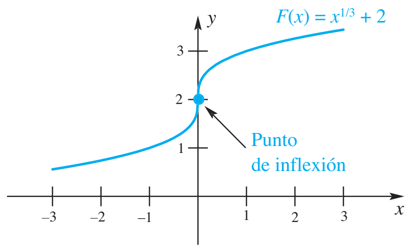


Figura 19

EJEMPLO 7 Encuentre todos los puntos de inflexión de $F(x) = x^{1/3} + 2$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

La segunda derivada, $F''(x)$, nunca es cero; sin embargo, no existe en $x = 0$. El punto $(0, 2)$ es un punto de inflexión, ya que $F''(x) > 0$ para $x < 0$ y $F''(x) < 0$ para $x > 0$. La gráfica se bosqueja en la figura 19. ■

Revisión de conceptos

1. Si $f'(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes; si $f''(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes.

2. Si ________ y ________ en un intervalo abierto I, entonces f es creciente y cóncava hacia abajo en I.

3. Un punto en la gráfica de una función continua, en donde la concavidad cambia se denomina ________.

4. Al tratar de localizar los puntos de inflexión para la gráfica de una función f debemos buscar números c, en donde ________ o bien ________.

Conjunto de problemas 3.2

En los problemas del 1 al 10 utilice el teorema de monotonía para encontrar en dónde la función dada es creciente y en dónde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$ **2.** $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

3. $h(t) = t^2 + 2t - 3$ **4.** $f(x) = x^3 - 1$

5. $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **6.** $f(t) = t^3 + 3t^2 - 12$

7. $h(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^3}{6}$ **8.** $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

9. $H(t) = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

10. $R(\theta) = \cos^2 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas del 11 al 18 utilice el teorema de la concavidad para determinar en dónde la función dada es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

11. $f(x) = (x - 1)^2$ **12.** $G(w) = w^2 - 1$

13. $T(t) = 3t^3 - 18t$ **14.** $f(z) = z^2 - \frac{1}{z^2}$

15. $q(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$

16. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ **17.** $F(x) = 2x^2 + \cos^2 x$

18. $G(x) = 24x^2 + 12 \operatorname{sen}^2 x$

En los problemas del 19 al 28 determine en dónde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Después dibuje la gráfica (véase el ejemplo 4).

19. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

20. $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ **22.** $F(x) = x^6 - 3x^4$

23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ **24.** $H(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$ **26.** $g(x) = x\sqrt{x - 2}$

27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$ **28.** $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

En los problemas del 29 al 34 dibuje la gráfica de una función continua f en [0, 6] que satisface todas las condiciones que se establecen.

29. $f(0) = 1; f(6) = 3$; creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 6)$.

30. $f(0) = 8; f(6) = -2$, decreciente en el intervalo $(0, 6)$; punto de inflexión en la pareja ordenada $(2, 3)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, 6)$.

31. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4;$
$f'(x) < 0$ en $(0, 3)$; $f'(x) > 0$ en $(3, 6)$;
$f''(x) > 0$ en $(0, 5)$; $f''(x) < 0$ en $(5, 6)$

32. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 6)$; $f'(2) = 0$;
$f''(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (2, 6)$; $f''(x) > 0$ en $(1, 2)$

33. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 6)$;
$f'(2) = f'(4) = 0$; $f''(x) > 0$ en $(0, 1) \cup (3, 4)$;
$f''(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (4, 6)$

34. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 5)$;
$f'(2) = f'(4) = 0$; $f'(x) = -1$ en $(5, 6)$;
$f''(x) < 0$ en $(0, 3) \cup (4, 5)$; $f''(x) > 0$ en $(3, 4)$

35. Demuestre que una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

36. Demuestre que una función cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.

37. Demuestre que, si $f'(x)$ existe y es continua en un intervalo I y si $f'(x) \neq 0$ en todos los puntos interiores de I, entonces f es creciente en todo el intervalo I o es decreciente en todo el intervalo I. *Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio para demostrar que no pueden existir dos puntos x_1 y x_2 de I en donde f' tiene signos opuestos.

38. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)$. Utilice el problema 37 para demostrar que f es creciente en todas partes.

39. Utilice el teorema de monotonía para demostrar cada proposición, si $0 < x < y$.

(a) $x^2 < y^2$ (b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ (c) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

40. ¿Qué condiciones sobre a, b y c harán que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ siempre sea creciente?

41. Determine a y b de modo que $f(x) = a\sqrt{x} + b/\sqrt{x}$ tenga a $(4, 13)$ como un punto de inflexión.

42. Suponga que la función cúbica $f(x)$ tiene tres ceros reales, r_1, r_2 y r_3. Demuestre que su punto de inflexión tiene abscisa $(r_1 + r_2 + r_3)/3$. *Sugerencia:* $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

43. Suponga que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si existen) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea creciente para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea creciente para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea creciente para toda x?

44. Suponga que $f''(x) > 0$ y $g''(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si las hay) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea cóncava hacia arriba para toda x?

GC *Utilice una calculadora gráfica o una computadora para resolver los problemas del 45 al 48.*

45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$ en el intervalo $I = (-2, 7)$.

(a) Dibuje la gráfica de f en I.

(b) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f'(x) < 0$ en I.

(c) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f''(x) < 0$ en I.

(d) Dibuje la gráfica de f' para confirmar su respuesta a la parte (b).

(e) Dibuje la gráfica de f'' para confirmar su respuesta a la parte (c).

46. Repita el problema 45 para $f(x) = x\cos^2(x/3)$ en $(0, 10)$.

47. Sea $f'(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ en $I = [-2, 4]$. En el intervalo I, ¿en dónde es creciente f?

48. Sea $f''(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4$ en $I = [-2, 3]$. En el intervalo I, ¿en dónde es cóncava hacia abajo f?

49. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas de distancia con respecto al tiempo. Para cada parte, haga un bosquejo de una gráfica de la posición del automóvil, s, contra el tiempo, t, e indique la concavidad.

(a) La velocidad del automóvil es proporcional a la distancia que ha recorrido.

(b) El automóvil está aumentando su velocidad.

(c) Yo no dije que el automóvil estaba deteniéndose, dije que su tasa de aumento de velocidad estaba disminuyendo.

(d) La velocidad del automóvil está aumentando 10 millas por hora cada minuto.

(e) El automóvil está deteniéndose muy lentamente hasta detenerse.

(f) El automóvil siempre recorre la misma distancia en intervalos iguales de tiempo.

50. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) Se está evaporando agua del tanque a una tasa constante.

(b) Se vierte agua al interior del tanque a una razón de 3 galones por minuto, pero también sale $\frac{1}{2}$ galón por minuto.

(c) Como el agua se vierte al tanque cónico a una tasa constante, el nivel del agua se eleva a una tasa cada vez más lenta.

(d) La inflación se mantuvo estable este año, pero se espera que se eleve cada vez más rápido el año entrante.

(e) En la actualidad el precio del petróleo está bajando, pero se espera que esta tendencia sea lenta y luego se revierta en 2 años.

(f) La temperatura de David está subiendo, pero parece que la penicilina está surtiendo efecto.

51. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje matemático, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) El costo de un automóvil continúa en aumento y a una tasa cada vez más rápida.

(b) Durante los últimos dos años, Estados Unidos ha continuado la reducción de su consumo de petróleo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(c) La población mundial continúa creciendo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(d) El ángulo que la torre inclinada de Pisa forma con la vertical aumenta rápidamente.

(e) Las utilidades de la compañía Upper Midwest crecen despacio.

(f) La compañía XYZ ha perdido dinero, pero pronto esta situación se revertirá.

52. Traduzca cada enunciado de la siguiente columna de un periódico en un enunciado sobre derivadas.

(a) En Estados Unidos, la razón R de deuda gubernamental al ingreso nacional permaneció sin cambio, alrededor de 28% hasta 1981, pero

(b) entonces comenzó a aumentar de manera cada vez más abrupta hasta llegar a 36% durante 1983.

53. Se vierte café en el vaso mostrado en la figura 20 a razón de 2 pulgadas cúbicas por segundo. El diámetro superior es de 3.5 pulgadas, el diámetro inferior es de 3 pulgadas y la altura del vaso es de 5 pulgadas. Este vaso se llena con casi 23 onzas. Determine la altura h del café como función del tiempo t y dibuje la gráfica de $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el vaso esté lleno.

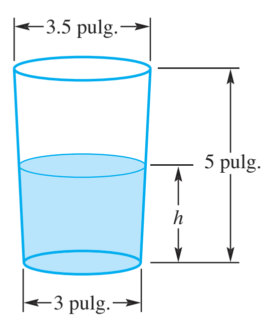


Figura 20

54. Se bombea agua a un tanque cilíndrico, a una razón constante de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 21. El tanque tiene 3 pies de diámetro y 9.5 pies de largo. El volumen del tanque es $\pi r^2 l = \pi \times 1.5^2 \times 9.5 \approx 67.152$ pies cúbicos ≈ 500 galones. Sin hacer cálculos, bosqueje una gráfica de la altura del agua como función del tiempo t (véase el ejemplo 6). ¿En dónde h es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

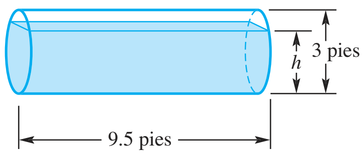


Figura 21

55. Se vierte un líquido al contenedor que se muestra en la figura 22 a razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo. Al contenedor le caben 24 pulgadas cúbicas. Bosqueje una gráfica de la altura h del líquido como una función del tiempo t. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

56. Un tonel de 20 galones, como el mostrado en la figura 23, tiene una fuga y sale agua a razón constante de 0.1 galones por día. Dibuje una gráfica de la altura h del agua como función del tiempo t; suponga que el tonel está lleno en el instante $t = 0$. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

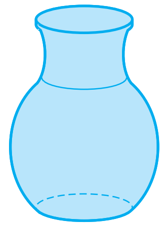


Figura 22

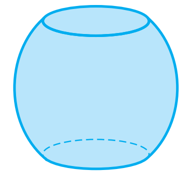


Figura 23

57. Con base en cada una de las tablas siguientes, qué puede deducir acerca de la forma de un recipiente en el que se da la medida del volumen del agua como una función de la profundidad.

(a)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	8	11	14	20	28

(b)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	9	12	14	20	28

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** creciente; cóncava hacia arriba **2.** $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ **3.** un punto de inflexión **4.** $f''(c) = 0; f''(c)$ no existe.

3.3 Extremos locales y extremos en intervalos abiertos

Recordemos de la sección 3.1 que el valor máximo (si existe) de una función f en un conjunto S es el valor más grande que f alcanza en el conjunto S. A veces se le conoce como **valor máximo global**, o *valor máximo absoluto* de f. Por lo tanto, para la función f con dominio $S = [a, b]$ cuya gráfica se bosqueja en la figura 1, $f(a)$ es el valor máximo global. Pero, ¿qué es $f(c)$? Quizá no sea el rey del país, pero al menos es el jefe de su propia localidad. Le llamamos **valor máximo local**, o *valor máximo relativo*. Por supuesto, un valor máximo global automáticamente es un valor máximo local. La figura 2 ilustra varias posibilidades. Observe que el valor máximo global (si existe) es el mayor de los valores máximos locales. De manera análoga, el valor mínimo global es el más pequeño de los valores mínimos locales.

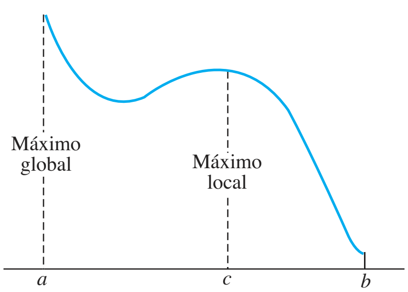


Figura 1

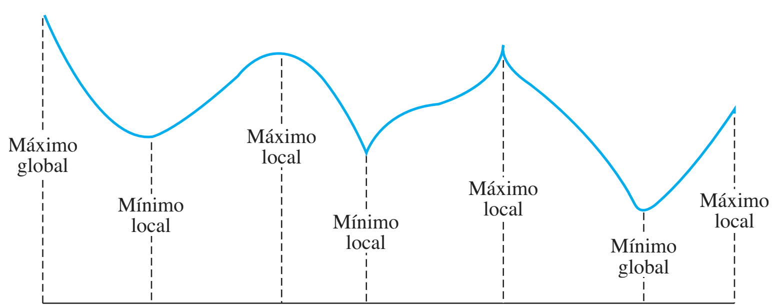


Figura 2

Aquí está la definición formal de máximos y mínimos locales. Recuerde que el símbolo $\cap$ denota la intersección (parte común) de dos conjuntos.

Definición

Sea S el dominio de f que contiene al punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es un **valor máximo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor máximo de f en $(a, b) \cap S$;

(ii) $f(c)$ es un **valor mínimo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor mínimo de f en $(a, b) \cap S$;

(iii) $f(c)$ es un **valor extremo local** de f, si es un valor máximo local o un valor mínimo local.

¿En dónde se presentan los valores extremos locales? El teorema del punto crítico (teorema 3.1B) se cumple si se reemplaza la frase *valor extremo* por *valor extremo local*; la demostración es esencialmente la misma. Así, los puntos críticos (puntos fronterizos, estacionarios y singulares) son los candidatos a ser puntos en donde pueden presentarse extremos locales. Decimos *candidatos* porque no aseguramos que deba tenerse un extremo local en cada punto crítico. La gráfica de la izquierda en la figura 3

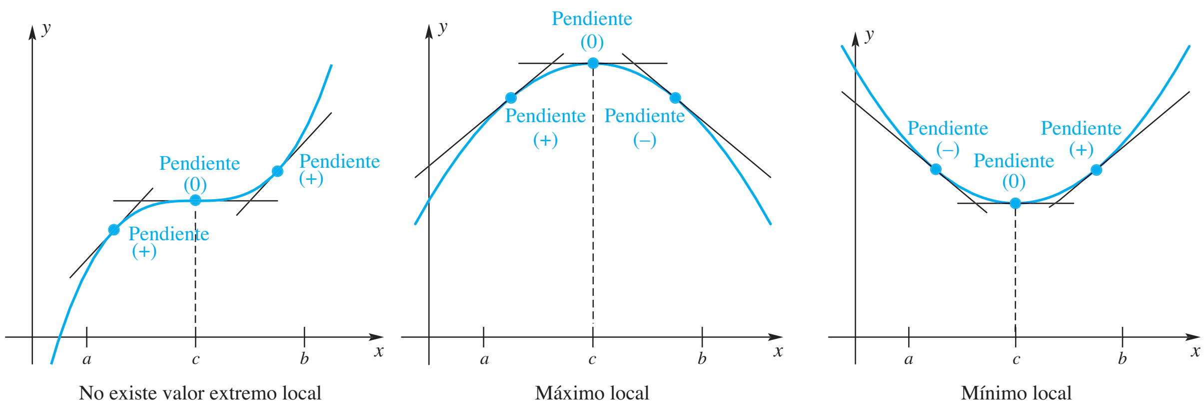


Figura 3

aclara esto. Sin embargo, si la derivada es positiva en un lado del punto crítico y negativa en el otro (y si la función es continua), entonces tenemos un extremo local, como se muestra en las gráficas de en medio y a la derecha de la figura 3.

Teorema A Prueba (criterio) de la primera derivada

Sea f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

(iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Demostración de (i) Como $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c), por el teorema de monotonía, f es creciente en $(a, c]$. Además, como $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), f es decreciente en $[c, b)$. Por lo tanto, $f(x) < f(c)$ para toda x en (a, b), excepto por supuesto en $x = c$. Concluimos que $f(c)$ es un máximo local.

Las demostraciones de (ii) y (iii) son semejantes. ■

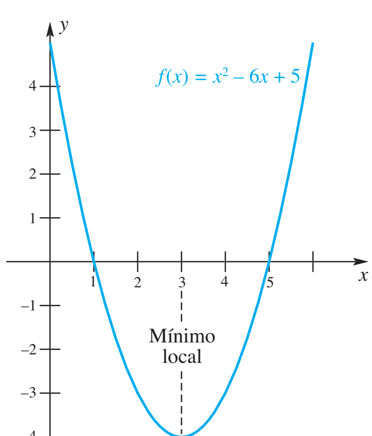


Figura 4

EJEMPLO 1 Encuentre los valores extremos locales de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función polinomial f es continua en todas partes y su derivada, $f'(x) = 2x - 6$, existe para toda x. Así, el único punto crítico para f es la solución única de $f'(x) = 0$; esto es, $x = 3$.

Como $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ para $x < 3$, f es decreciente en $(-\infty, 3]$, y como $2(x - 3) > 0$ para $x > 3$, f es creciente en $[3, \infty)$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(3) = -4$ es un valor mínimo local de f. Como 3 es el único punto crítico, no existen otros valores extremos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. Observe que, en este caso, $f(3)$ es en realidad el valor mínimo (global). ■

EJEMPLO 2 Encuentre los valores extremos locales de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$en $(-\infty, \infty)$.

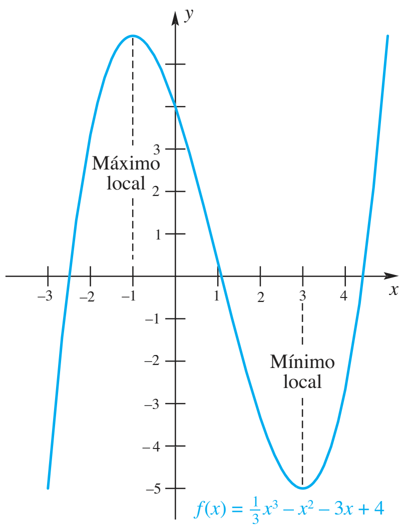


Figura 5

SOLUCIÓN Como $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, los únicos puntos críticos de f son -1 y 3. Cuando usamos los puntos de prueba -2, 0 y 4, sabemos que $(x + 1)(x - 3) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$ y $(x + 1)(x - 3) < 0$ en $(-1, 3)$. Por la prueba de la primera derivada, concluimos que $f(-1) = \frac{17}{3}$ es un valor máximo local y que $f(3) = -5$ es un valor mínimo local (véase la figura 5). ■

EJEMPLO 3 Encuentre los valores extremos de $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{2/3}$ en $(-\pi/6, 2\pi/3)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{3(\operatorname{sen} x)^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

Los puntos 0 y $\pi/2$ son puntos críticos, ya que $f'(0)$ no existe y $f'(\pi/2) = 0$. Ahora, $f'(x) < 0$ en $(-\pi/6, 0)$ y en $(\pi/2, 2\pi/3)$, mientras que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$. Por la prueba de la primera derivada concluimos que $f(0) = 0$ es un valor mínimo local y que $f(\pi/2) = 1$ es un valor máximo local. La gráfica de f se muestra en la figura 6. ■

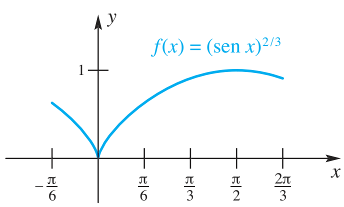


Figura 6

Prueba (criterio) de la segunda derivada Existe otra prueba para máximos y mínimos locales que, a veces, es más fácil de aplicar que la prueba de la primera derivada. Incluye la evaluación de la segunda derivada en los puntos estacionarios. No se aplica a los puntos singulares.

Teorema B Prueba (criterio) de la segunda derivada

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

(i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.
(ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Demostración de (i) Es una tentación decir que, como $f''(c) < 0$, f es cóncava hacia abajo cerca de c para asegurar que esto demuestra (i). Sin embargo, para asegurar que f es cóncava hacia abajo en una vecindad de c, necesitamos que $f''(x) < 0$ en esa vecindad (no sólo en c) y nada en nuestra hipótesis garantiza esto. Debemos ser un poco más cuidadosos. Por definición e hipótesis,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} < 0$$

de modo que podemos concluir que existe un intervalo (posiblemente pequeño) (α, β) alrededor de c, en donde

$$\frac{f'(x)}{x - c} < 0, \qquad x \neq c$$

Pero esta desigualdad implica que $f'(x) > 0$ para $\alpha < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < \beta$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(c)$ es un valor máximo local.

La demostración de (ii) es semejante. ■

EJEMPLO 4 Para $f(x) = x^2 - 6x + 5$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar extremos locales.

SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 1. Observe que

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$
$$f''(x) = 2$$

Así, $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$. En consecuencia, por la prueba de la segunda derivada, $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

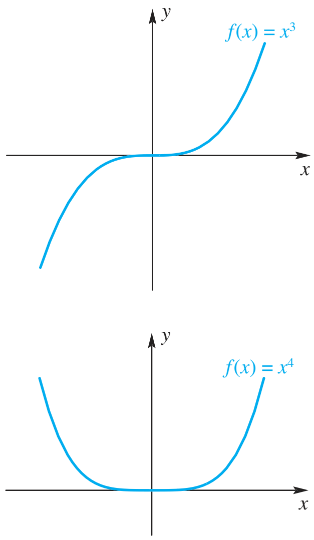


Figura 7

EJEMPLO 5 Para $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales.

SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 2.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

Los puntos críticos son -1 y 3 ($f'(-1) = f'(3) = 0$). Como $f''(-1) = -4$ y $f''(3) = 4$. Por la prueba de la segunda derivada concluimos que $f(-1)$ es un valor máximo local y que $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

Por desgracia, la prueba de la segunda derivada en ocasiones falla, ya que $f''(x)$ puede ser cero en un punto estacionario. Para $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$ (véase la figura 7). La primera no tiene un valor máximo o mínimo local en cero; la segunda tiene un mínimo local ahí. Esto muestra que si $f''(x) = 0$ en un punto estacionario, no podemos sacar una conclusión acerca de máximos o mínimos sin más información.

Extremos en intervalos abiertos Con frecuencia, los problemas que estudiamos en esta sección y en la sección 3.1 suponen que el conjunto en el que queremos maximizar o minimizar una función fue un intervalo *cerrado*. Sin embargo, los intervalos que surgen en la práctica no siempre son cerrados; en ocasiones son abiertos o, incluso, abierto por un extremo y cerrado por el otro. Todavía podemos manejar estos problemas, si aplicamos correctamente la teoría desarrollada en esta sección. Tenga presente que máximo (mínimo) sin un adjetivo calificativo significa máximo (mínimo) global.

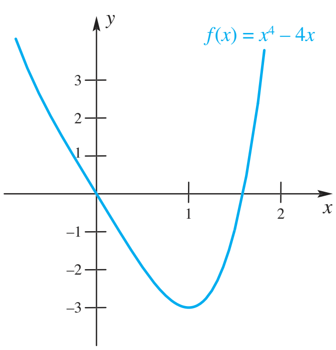


Figura 8

EJEMPLO 6 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^4 - 4x$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Como $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales (fórmula cuadrática), sólo existe un punto crítico, $x = 1$. Para $x < 1, f'(x) < 0$, mientras que para $x > 1, f'(x) > 0$. Concluimos que $f(1) = -3$ es un valor mínimo local de f; y como f es decreciente a la izquierda de 1 y decreciente a la derecha de 1, en realidad debe ser el valor mínimo de f.

Los hechos que se acaban de establecer implican que f no puede tener un valor máximo. La gráfica de f se muestra en la figura 8. ■

EJEMPLO 7 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de

$$G(p) = \frac{1}{p(1 - p)}$$

en $(0, 1)$.

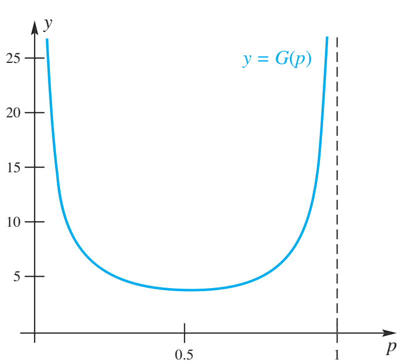


Figura 9

SOLUCIÓN

$$G'(p) = \frac{d}{dp}[p(1 - p)]^{-1} = \frac{2p - 1}{p^2(1 - p)^2}$$

El único punto crítico es $p = 1/2$. Para cada valor de p en el intervalo $(0, 1)$ el denominador es positivo; por lo tanto, el numerador determina el signo. Si p está en el intervalo $(0, 1/2)$, entonces el numerador es negativo; de aquí que $G'(p) < 0$. De forma análoga, si p está en el intervalo $(1/2, 1)$, $G'(p) > 0$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $G(1/2) = 4$ es un mínimo local. Como no hay puntos fronterizos o puntos singulares por verificar, $G(1/2)$ es un mínimo global. No hay máximo. La gráfica de $y = G(p)$ se muestra en la figura 9. ■

Revisión de conceptos

1. Si f es continua en c, $f'(x) > 0$ cerca de c a su lado izquierdo, y $f'(x) < 0$ cerca de c a su lado derecho, entonces $f(c)$ es un valor ________ local para f.

2. Si $f'(x) = (x+2)(x-1)$, entonces $f(-2)$ es un valor ________ local para f, y $f(1)$ es un valor ________ local para f.

3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, esperamos encontrar un valor ________ local para f en c.

4. Si $f(x) = x^3$, entonces $f(0)$ no es ________ ni ________, aunque $f''(0) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.3

En los problemas del 1 al 10 identifique los puntos críticos. Después utilice (a) la prueba de la primera derivada y (si es posible) (b) la prueba de la segunda derivada para decidir cuáles de los puntos críticos dan un máximo local y cuáles dan un mínimo local.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

2. $f(x) = x^3 - 12x + \pi$

3. $f(\theta) = \text{sen}\, 2\theta, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \text{sen}\, x, 0 < x < 2\pi$

5. $\Psi(\theta) = \text{sen}^2\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $r(z) = z^4 + 4$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

8. $g(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^2}$

9. $h(y) = y^2 - \dfrac{1}{y}$

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

En los problemas del 11 al 20 encuentre los puntos críticos y utilice la prueba que elija para decidir cuáles puntos críticos dan un valor máximo local y cuáles dan un valor mínimo local. ¿Cuáles son estos valores máximos y mínimos locales?

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $g(x) = x^4 + x^2 + 3$

13. $H(x) = x^4 - 2x^3$

14. $f(x) = (x - 2)^5$

15. $g(t) = \pi - (t - 2)^{2/3}$

16. $r(s) = 3s + s^{2/5}$

17. $f(t) = t - \dfrac{1}{t}, t \neq 0$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1 + \text{sen}\,\theta}, 0 < \theta < 2\pi$

20. $g(\theta) = |\text{sen}\,\theta|, 0 < \theta < 2\pi$

En los problemas del 21 al 30 determine, si es posible, los valores máximo y mínimo (globales) de la función dada en el intervalo que se indica.

21. $f(x) = \text{sen}^2 2x$ en $[0, 2]$

22. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

23. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 32}$ en $[0, \infty)$

24. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

25. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, 4]$

26. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, \infty)$

27. $f(x) = \dfrac{64}{\text{sen}\, x} + \dfrac{27}{\cos x}$ en $(0, \pi/2)$

28. $g(x) = x^2 + \dfrac{16x^2}{(8 - x)^2}$ en $(8, \infty)$

29. $H(x) = |x^2 - 1|$ en $[-2, 2]$

30. $h(t) = \text{sen}\, t^2$ en $[0, \pi]$

En los problemas del 31 al 36 se da la primera derivada, f'. Encuentre todos los valores de x que hacen que la función f (a) tenga un mínimo local y (b) un máximo local.

31. $f'(x) = x^3(1 - x)^2$

32. $f'(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

33. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$

34. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2$

35. $f'(x) = (x - A)^2(x - B)^2, A \neq B$

36. $f'(x) = x(x - A)(x - B), 0 < A < B$

En los problemas del 37 al 42 bosqueje una gráfica de una función con las propiedades dadas. Si es imposible graficar tal función, entonces indique esto y justifique su respuesta.

37. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y dos máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

38. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como tres máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

39. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y un mínimo local y un máximo local en $(0, 6)$.

40. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como un mínimo local, y no tiene máximo local en $(0, 6)$.

41. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene tres máximos locales y carece de mínimo local en $(0, 6)$.

42. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene dos máximos locales y no tiene mínimo local en $(0, 6)$.

43. Considere $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, con $A > 0$. Demuestre que $f(x) \geq 0$ para toda x si y sólo si $B^2 - 4AC \leq 0$.

44. Considere $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, con $A > 0$. Demuestre que f tiene un máximo local y un mínimo local si y sólo si $B^2 - 3AC > 0$.

45. ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a f, con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** máximo **2.** máximo; mínimo **3.** máximo **4.** máximo local; mínimo local; 0.

3.4 Problemas prácticos

Con base en los ejemplos y la teoría desarrollada en las primeras tres secciones de este capítulo, sugerimos el siguiente método paso a paso que puede aplicarse a muchos problemas prácticos de optimización. No lo siga ciegamente; con frecuencia, el sentido común sugiere un enfoque alterno o la omisión de algunos pasos.

Paso 1: Haga un dibujo del problema y asigne variables idóneas para las cantidades importantes.

Paso 2: Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de las variables del paso 1.

Paso 3: Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar a Q como una función de una sola variable.

Paso 4: Encuentre los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituya los valores críticos en la función objetivo o bien utilice la teoría de la última sección (es decir, los criterios de la primera o segunda derivada) para determinar el máximo o el mínimo.

Use siempre su intuición para obtener alguna idea de cuál debe ser la solución del problema. Para muchos problemas físicos puede tener una estimación aproximada del valor óptimo antes de que comience a realizar los detalles.

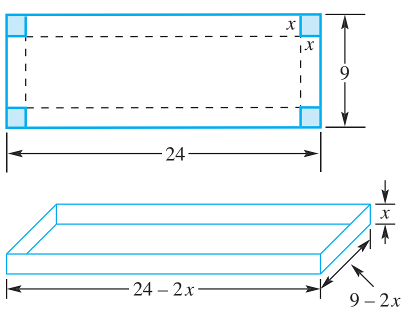


Figura 1

EJEMPLO 1 Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura 1. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

SOLUCIÓN Sea x el ancho del cuadrado que se cortará y V el volumen de la caja resultante. Entonces

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Ahora, x no puede ser menor que 0 ni mayor que 4.5. Por lo tanto, nuestro problema es maximizar V en $[0, 4.5]$. Los puntos estacionarios se determinan haciendo dV/dx igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Esto da $x = 2$ o $x = 9$, pero 9 no está en el intervalo $[0, 4.5]$. Vemos que sólo existen tres puntos críticos, 0, 2 y 4.5. En los puntos fronterizos 0 y 4.5, $V = 0$; en 2, $V = 200$. Concluimos que la caja tiene un volumen máximo de 200 pulgadas cúbicas, si $x = 2$, esto es, si la caja es de 20 pulgadas de largo, 5 de ancho y 2 de profundidad. ■

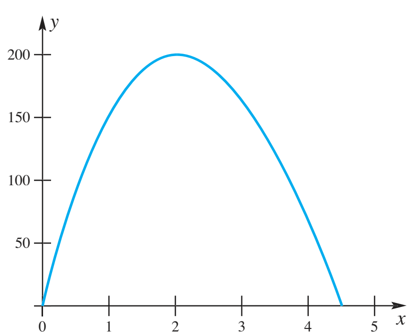


Figura 2

A menudo es útil graficar la función objetivo. Dibujar funciones puede hacerse con facilidad con una calculadora gráfica o un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional). La figura 2 muestra una gráfica de la función $V(x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$. Cuando $x = 0$, $V(x)$ es igual a cero. En el contexto de los dobleces de la caja, esto significa que cuando el ancho de las esquinas recortadas es cero no hay que doblar hacia arriba, de modo que el volumen es cero. También, cuando $x = 4.5$, el pedazo de cartón se dobla a la mitad, de modo que no tiene base; esta caja también tendrá volumen cero. Por lo tanto, $V(0) = 0$ y $V(4.5) = 0$. El mayor volumen debe alcanzarse para algún valor de x entre 0 y 4.5. La gráfica sugiere que el volumen máximo es cuando x es alrededor de 2; por medio de cálculo, podemos determinar que el valor *exacto* de x que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

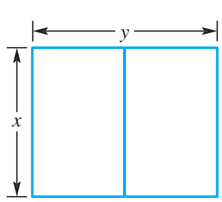


Figura 3

EJEMPLO 2 Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes, como se muestra en la figura 3. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

SOLUCIÓN Sea x el ancho y y el largo del área total encerrada, ambas en metros. Como hay 100 metros de cerca, $3x + 2y = 100$; es decir,

$$y = 50 - \tfrac{3}{2}x$$

El área total A está dada por

$$A = xy = 50x - \tfrac{3}{2}x^2$$

Como debe haber tres lados de longitud x, vemos que $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$. Así, nuestro problema es maximizar A en $\left[0, \frac{100}{3}\right]$. Ahora

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 3x$$

Cuando igualamos $50 - 3x$ a cero y resolvemos, obtenemos $x = \frac{50}{3}$ como un punto estacionario. Así, existen tres puntos críticos: 0, $\frac{50}{3}$, y $\frac{100}{3}$. Los dos puntos fronterizos 0 y $\frac{100}{3}$ dan $A = 0$, mientras que $x = \frac{50}{3}$ da $A \approx 416.67$. Las dimensiones deseadas son $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ metros y $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$ metros.

¿Es razonable esta respuesta? Sí. Esperaríamos utilizar más de la cerca dada en la dirección y que en la dirección x, ya que en la primera se está cercando dos veces, mientras que en la segunda está cercándose tres. ■

EJEMPLO 3 Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

SOLUCIÓN Sea a la altura y b el radio de la base del cono dado (ambas constantes). Denótese por h, r y V la altura, el radio y el volumen, respectivamente, de un cilindro inscrito (véase la figura 4).

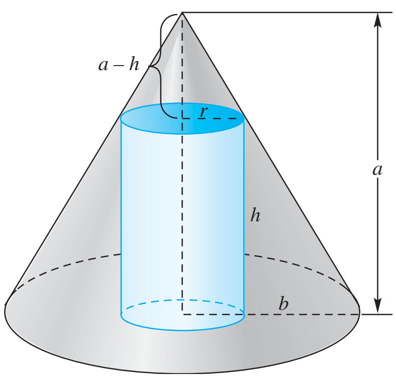


Figura 4

Antes de proceder, apliquemos un poco de intuición. Si el radio del cilindro fuese cercano al radio de la base del cono, entonces el volumen del cilindro sería cercano a cero. Ahora, imagine cilindros inscritos cuya altura aumenta, pero su radio disminuye. Al principio, los volúmenes aumentarían a partir de cero, pero después disminuirían hacia cero cuando la altura de los cilindros fuese cercana a la altura del cono. De manera intuitiva, el volumen debe ser máximo para algún cilindro. Puesto que en la fórmula del volumen el radio se eleva al cuadrado, cuenta más que la altura y esperaríamos $r > h$ en el máximo.

El volumen del cilindro inscrito es

$$V = \pi r^2 h$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a - h}{r} = \frac{a}{b}$$

que da

$$h = a - \frac{a}{b}r$$

Cuando sustituimos esta expresión para h en la fórmula para V, obtenemos

$$V = \pi r^2\left(a - \frac{a}{b}r\right) = \pi a r^2 - \pi\frac{a}{b}r^3$$

Queremos maximizar V para r en el intervalo $[0, b]$. Ahora,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - 3\pi\frac{a}{b}r^2 = \pi a r\left(2 - \frac{3}{b}r\right)$$

Esto produce los puntos estacionarios $r = 0$ y $r = 2b/3$, dándonos a considerar tres puntos críticos en $[0, b]$: 0, $2b/3$ y b. Como se esperaba, $r = 0$ y $r = b$ dan un volumen de cero. Así, $r = 2b/3$ tiene que dar el volumen máximo. Cuando sustituimos este valor para

Álgebra y geometría
Siempre que le sea posible, trate de ver el problema desde los dos puntos de vista, geométrico y algebraico. El ejemplo 3 es un buen ejemplo mediante el cual esta clase de enfoque se presta para tener una idea del problema.

r en la ecuación que relaciona r con h, encontramos que $h = a/3$. En otras palabras, el cilindro inscrito que tiene mayor volumen es cuando su radio es dos tercios del radio de la base del cono y su altura es un tercio de la altura del cono. ■

EJEMPLO 4 Suponga que un pez nada río arriba con velocidad relativa al agua v y que la corriente del río tiene velocidad $-v_c$ (el signo negativo indica que la velocidad de la corriente es en dirección opuesta a la del pez). La energía empleada en recorrer una distancia d a contracorriente es directamente proporcional al tiempo requerido para recorrer la distancia d y el cubo de la velocidad. ¿Qué velocidad v minimiza la energía empleada en nadar esta distancia?

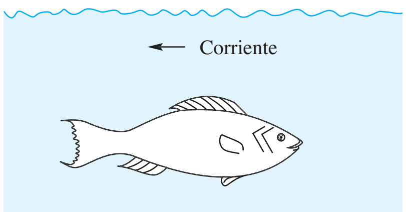


Figura 5

SOLUCIÓN La figura 5 ilustra la situación. Como la velocidad del pez a contracorriente es $v - v_c$, tenemos $d = (v - v_c)t$, donde t es el tiempo requerido. Así, $t = d/(v - v_c)$. Por lo tanto, para un valor fijo de v, la energía requerida para que el pez recorra la distancia d es

$$E(v) = k\frac{d}{v - v_c}v^3 = kd\frac{v^3}{v - v_c}$$

El dominio para la función E es el intervalo abierto (v_c, ∞). Para determinar el valor de v que minimiza la energía requerida hacemos $E'(v) = 0$ y despejamos a v:

$$E'(v) = kd\frac{(v - v_c)3v^2 - v^3(1)}{(v - v_c)^2} = \frac{kd}{(v - v_c)^2}v^2(2v - 3v_c) = 0$$

El único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞) se determina resolviendo $2v - 3v_c = 0$, que lleva a $v = \frac{3}{2}v_c$. El intervalo es abierto, por lo que no existen puntos fronterizos que verificar. El signo de $E'(v)$ depende por completo de la expresión $2v - 3v_c$, ya que las otras expresiones son positivas. Si $v < \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c < 0$, por lo que E es decreciente a la izquierda de $\frac{3}{2}v_c$. Si $v > \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c > 0$, por lo que E es creciente a la derecha de $\frac{3}{2}v_c$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $v = \frac{3}{2}v_c$ produce un mínimo local. Ya que éste es el único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞), esto debe dar un mínimo global. Por lo tanto, la velocidad que minimiza la energía empleada es una y media veces la rapidez de la corriente. ■

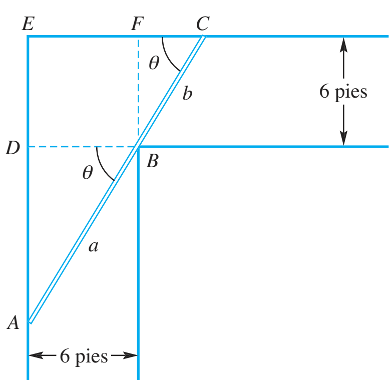


Figura 6

EJEMPLO 5 Un pasillo de 6 pies de ancho da vuelta en ángulo recto. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina, suponiendo que la varilla no puede doblarse?

SOLUCIÓN La varilla tocará apenas la esquina interna de la vuelta y las paredes exteriores del pasillo. Como se sugiere en la figura 6, sean a y b las longitudes de los segmentos AB y BC, y sea θ la medida de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle FCB$. Considere los dos triángulos rectángulos semejantes $\triangle ADB$ y $\triangle BFC$; éstos tienen hipotenusas a y b, respectivamente. Un poco de trigonometría aplicada a estos ángulos da

$$a = \frac{6}{\cos\theta} = 6\sec\theta \qquad \text{y} \qquad b = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta} = 6\csc\theta$$

Observe que el ángulo θ determina la posición de la varilla. Así que la longitud total de la varilla en la figura 6 es

$$L(\theta) = a + b = 6\sec\theta + 6\csc\theta$$

El dominio para θ es el intervalo abierto $(0, \pi/2)$. La derivada de L es

$$\begin{aligned}L'(\theta) &= 6 \sec \theta \tan \theta - 6 \csc \theta \cot \theta \\ &= 6\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right) \\ &= 6\frac{\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

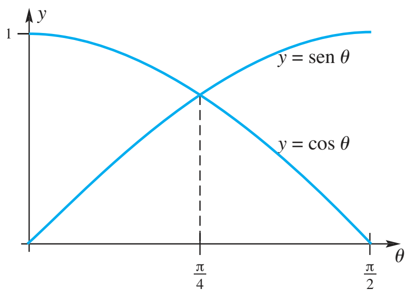


Figura 7

Por lo tanto $L'(\theta) = 0$ siempre que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta = 0$. Esto lleva a $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$. El único ángulo en $(0, \pi/2)$ para el que $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ es el ángulo $\pi/4$ (véase la figura 7). Nuevamente aplicamos la prueba de la primera derivada. Si $0 < \theta < \pi/4$, entonces $\operatorname{sen} \theta < \cos \theta$ (otra vez véase la figura 7), de modo que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta < 0$. Por lo tanto, $L(\theta)$ es decreciente en $(0, \pi/4)$. Si $\pi/4 < \theta < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen} \theta > \cos \theta$, por lo que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta > 0$. Así, $L(\theta)$ es creciente en $(\pi/4, \pi/2)$. Con base en el criterio de la prueba de la primera derivada, $\theta = \pi/4$ produce un mínimo. No obstante, el problema pregunta por la varilla *más larga* que puede dar la vuelta alrededor de la esquina. Como lo indica la figura 8, en realidad determinamos la varilla *más corta* que satisface las condiciones de la figura 6; en otras palabras, determinamos la varilla más corta que no da vuelta alrededor de la esquina. Por lo tanto, la varilla más larga que puede dar la vuelta alrededor de la esquina es $L(\pi/4) = 6 \sec \pi/4 + 6 \csc \pi/4 = 12\sqrt{2} \approx 16.97$ pies. ■

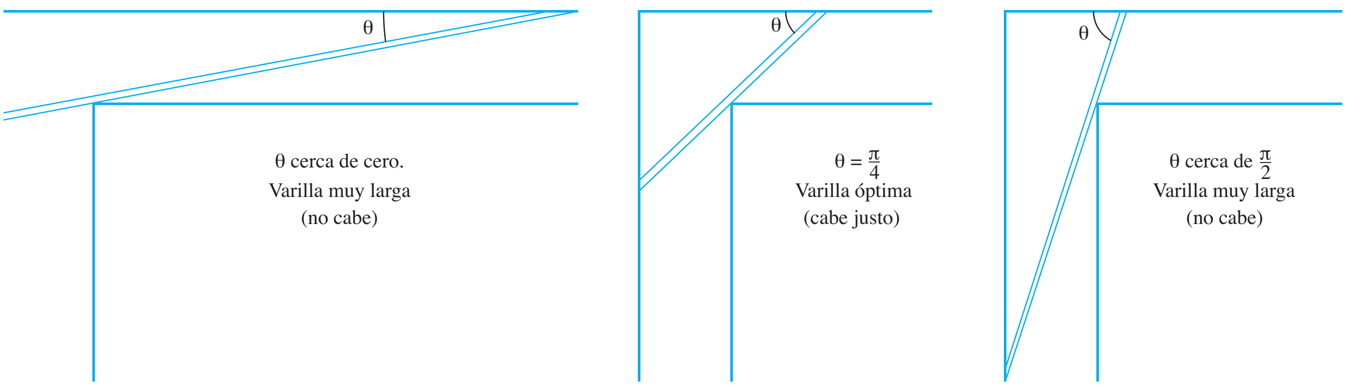


Figura 8

Mínimos cuadrados (opcional) Existen varios fenómenos físicos, económicos, y sociales en los que una variable es proporcional a otra. Por ejemplo, la segunda Ley de Newton establece que la fuerza F sobre un objeto de masa m es proporcional a su aceleración a ($F = ma$). La Ley de Hooke dice que la fuerza que se ejerce sobre un resorte es proporcional a la distancia que éste se alarga ($F = kx$). (La Ley de Hooke a veces se da como $F = -kx$, con el signo menos indicando que la fuerza está en la dirección contraria al alargamiento. Por ahora, ignoraremos el signo de la fuerza). Los costos de fabricación son proporcionales al número de unidades producidas. El número de accidentes automovilísticos es proporcional al volumen del tránsito. Éstos son *modelos* y en un experimento, en rara ocasión, encontramos que los datos observados se ajustan al modelo de manera exacta.

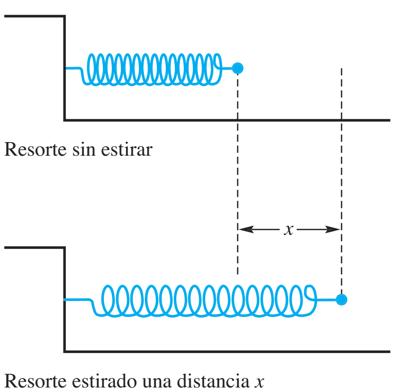


Figura 9

Suponga que observamos la fuerza ejercida por un resorte cuando se alarga x centímetros (véase la figura 9). Por ejemplo, cuando alargamos el resorte 0.5 centímetros (0.005 metros), observamos una fuerza de 8 newtons, cuando lo alargamos 1.0 centímetro, observamos una fuerza de 17 newtons, y así sucesivamente. La figura 10 muestra observaciones adicionales y la figura 11 muestra una gráfica de los pares ordenados (x_i, y_i), donde x_i es la distancia que se estira y y_i es la fuerza que se ejerce sobre el resorte. Una gráfica como ésta, de los pares ordenados, se denomina **gráfica de dispersión o diagrama de dispersión**.

Distancia alargada, x (metros)	Fuerza y ejercida por el resorte (newtons)
0.005	8
0.010	17
0.015	22
0.020	32
0.025	36

Figura 10

Generalizamos el problema en uno donde se nos dan n puntos, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Nuestro objetivo es encontrar una recta que pase por el origen y que se *ajuste mejor* a estos puntos. Antes de continuar, debemos introducir la notación sigma (Σ).

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa la suma de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Por ejemplo,

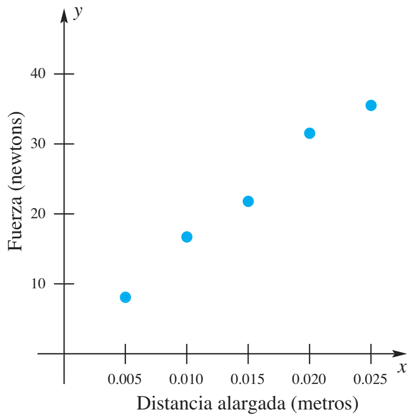


Figura 11

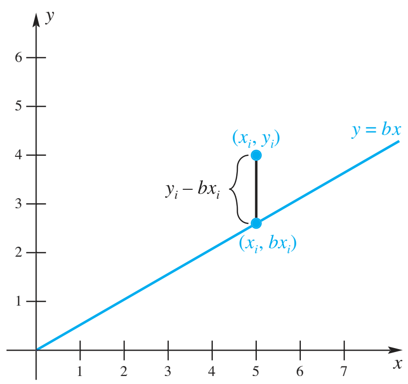


Figura 12

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

En el segundo caso, primero multiplicamos x_i y y_i y después sumamos.

Para encontrar la recta que se ajuste mejor a estos puntos, debemos especificar cómo mediremos el ajuste. Nuestra recta que *mejor se ajusta*, y que pasa por el origen, se define como aquella que minimiza la suma del cuadrado de las distancias verticales entre (x_i, y_i) y la recta $y = bx$. Si (x_i, y_i) es un punto del conjunto de datos, entonces (x_i, bx_i) es el punto sobre la recta $y = bx$ que se encuentra directamente arriba o abajo de (x_i, y_i). Por lo tanto, la distancia vertical entre (x_i, y_i) y (x_i, bx_i) es $y_i - bx_i$. (Véase la figura 12). Así, la distancia al cuadrado es $(y_i - bx_i)^2$. El problema es encontrar el valor de b que minimiza la suma de los cuadrados de estas diferencias. Si definimos

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2$$

entonces debemos encontrar el valor de b que *minimiza* S. Éste es un problema de minimización, como los que se encontraron antes. Sin embargo, tenga en mente que las parejas ordenadas (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ están *fijos*; en este problema la variable es b.

Procedemos como antes a encontrar dS/db, igualando el resultado a cero y resolviendo para b. Como la derivada es un operador lineal, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{db} &= \frac{d}{db}\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{db}(y_i - bx_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - bx_i)\left(\frac{d}{db}(y_i - bx_i)\right) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - bx_i)
\end{aligned}$$

Al igualar este resultado a cero y al resolver se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - bx_i) \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
b &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}
\end{aligned}$$

Para ver que esto da un valor mínimo para S observamos que

$$\frac{d^2 S}{db^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

que siempre es positiva. No hay puntos fronterizos que verificar. Así, por el criterio de la segunda derivada, concluimos que la recta $y = bx$, con $b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_1^2$, es la recta que mejor ajusta, en el sentido de minimizar S. La recta $y = bx$ se denomina **recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen**.

EJEMPLO 6 Encuentre la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen para los datos del resorte en la figura 10.

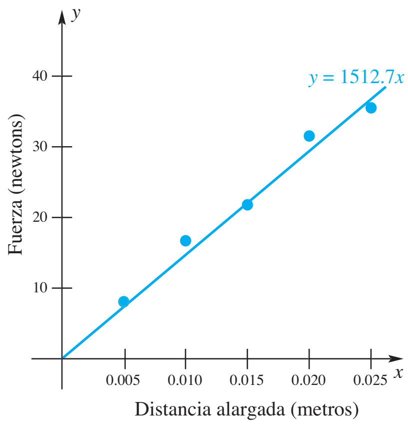


Figura 13

SOLUCIÓN

$$b = \frac{0.005 \cdot 8 + 0.010 \cdot 17 + 0.015 \cdot 22 + 0.020 \cdot 32 + 0.025 \cdot 36}{0.005^2 + 0.010^2 + 0.015^2 + 0.020^2 + 0.025^2}$$
$$\approx 1512.7$$

Por lo tanto, la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen es $y = 1512.7x$ y se muestra en la figura 13. Por consiguiente, la estimación de la constante del resorte es $k = 1512.7$ ■

Para la mayor parte de los problemas de ajuste de rectas, no es razonable suponer que la recta pase por el origen. Una suposición más razonable es que y esté relacionada con x por medio de $y = a + bx$. Sin embargo, en este caso la suma de cuadrados es una función de a y b, por lo que nos enfrentamos con el problema de minimizar una función de dos variables.

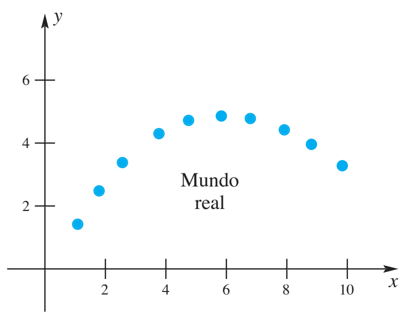


Figura 14

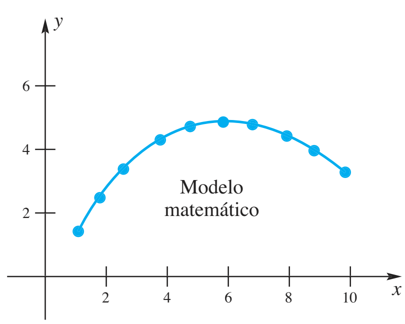


Figura 15

Aplicaciones a la economía (opcional) Considere una empresa común, la compañía ABC. Por simplicidad, suponga que ABC produce y comercia un solo producto; podrían ser aparatos de televisión, baterías para automóviles o barras de jabón. Si vende x unidades del producto en un periodo fijo (por ejemplo, un año), podría cobrar un **precio**, $p(x)$, por cada unidad. En otras palabras, $p(x)$ es el precio requerido para atraer una demanda de x unidades. El **ingreso total** que ABC puede esperar está dado por $R(x) = xp(x)$, el número de unidades por el precio unitario.

Para producir y vender x unidades, ABC tendrá un costo total, $C(x)$. Por lo regular, es la suma de un **costo fijo** (material de oficina, impuestos a la propiedad, etcétera) más un **costo variable** que depende del número de unidades producidas.

El concepto clave para la compañía es la **utilidad (ganancia) total**, $P(x)$. Sólo es la diferencia entre el ingreso y el costo; es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

Ordinariamente, una compañía busca maximizar su ganancia total.

Existe una característica que tiende a distinguir los problemas en economía de los correspondientes a las ciencias físicas. En la mayoría de los casos, los productos de ABC serán unidades discretas (usted no puede fabricar o vender 8.23 aparatos de televisión o π baterías para automóvil). Así, por lo general las funciones $R(x)$, $C(x)$ y $P(x)$ sólo están definidas para $x = 0, 1, 2, \ldots$ y, en consecuencia, sus gráficas consisten en puntos discretos (véase la figura 14). Para hacer que las herramientas de cálculo estén disponibles, conectamos estos puntos por medio de una curva suave (véase la figura 15), con lo cual pretendemos que R, C y P sean funciones derivables. Esto ilustra un aspecto de *la modelación matemática* que casi siempre es necesario, en especial en economía. Para modelar problemas del mundo real, debemos hacer suposiciones que lo simplifiquen. Esto significa que las respuestas que obtengamos son sólo aproximaciones de las respuestas que buscamos; ésta es una de las razones por las que la economía es algo menos que una ciencia perfecta. Un conocido estadístico una vez dijo: *ningún modelo es exacto, pero muchos son útiles*.

Un problema relacionado para un economista es cómo obtener fórmulas para las funciones $C(x)$ y $p(x)$. En un caso sencillo, $C(x)$ podría tener la forma

$$C(x) = 10{,}000 + 50x$$

Si es así, \$10,000 es el **costo fijo** y \$50x es el **costo variable**, sobre la base de que hay un costo directo de \$50 por cada unidad producida. Tal vez una situación más común sea

$$C_1(x) = 10{,}000 + 45x + 100\sqrt{x}$$

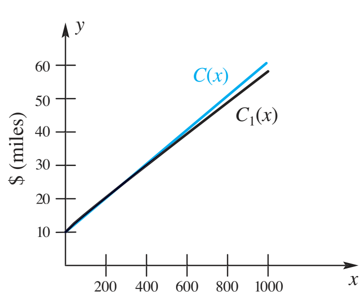


Figura 16

Ambas funciones de costo se muestran en la figura 16.

La función de costo $C(x)$ indica que el costo de fabricación de una unidad adicional es el mismo, sin importar cuántas unidades se hayan fabricado. Por otra parte, la función de costo $C_1(x)$ indica que el costo de fabricación de unidades adicionales aumenta, pero a una tasa decreciente. Por lo tanto, $c_1(x)$ permite lo que los economistas denominan economías de escala.

La selección de funciones adecuadas para modelar costo y precio no es una tarea sencilla. A veces, pueden inferirse de las hipótesis básicas. En otros casos, un estudio

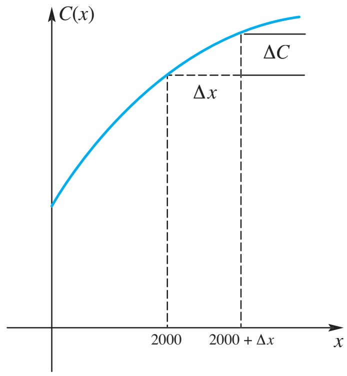


Figura 17

cuidadoso de la historia de la compañía sugerirá opciones razonables. Algunas veces, simplemente debemos hacer conjeturas inteligentes.

Uso de la palabra marginal Suponga que la empresa ABC conoce su función de costo $C(x)$ y que tiene planeado, tentativamente, producir 2000 unidades este año. Nos gustaría determinar el costo adicional por unidad, si ABC aumenta un poco su producción. Por ejemplo, ¿sería menor que el ingreso adicional por unidad? Si es así, tendría un buen sentido económico aumentar la producción.

Si la función de costo es la que se muestra en la figura 17, nos estaríamos preguntando por el valor de $\Delta C/\Delta x$ cuando $\Delta x = 1$. Pero esperamos que esto estará muy cerca del valor de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

cuando $x = 2000$. Este límite se denomina **costo marginal**. Los matemáticos reconocemos esto como dC/dx, la derivada de C con respecto a x.

De una manera similar, definimos **precio marginal** como dp/dx, **ingreso marginal** como dR/dx y **utilidad marginal** como dP/dx.

Ahora ilustramos cómo resolver una amplia variedad de problemas económicos.

Vocabulario de economía

Ya que la economía tiende a ser un estudio de fenómenos discretos, su profesor de economía puede definir el costo marginal en x como el costo de producir una unidad adicional; esto es, como

$$C(x + 1) - C(x)$$

En el modelo matemático, este número será muy cercano en valor a dC/dx, y puesto que el último es un concepto principal en cálculo, elegimos tomarlo como la definición de costo marginal. Se tienen enunciados similares para ingreso marginal y utilidad marginal.

EJEMPLO 7 Suponga que $C(x) = 8300 + 3.25x + 40\sqrt[3]{x}$ dólares. Encuentre el costo promedio por unidad y el costo marginal; después evalúelos cuando $x = 1000$.

SOLUCIÓN

$$\text{Costo promedio:} \quad \frac{C(x)}{x} = \frac{8300 + 3.25x + 40x^{1/3}}{x}$$

$$\text{Utilidad marginal:} \quad \frac{dC}{dx} = 3.25 + \frac{40}{3}x^{-2/3}$$

En $x = 1000$, éstos tiene los valores 11.95 y 3.38, respectivamente. Esto significa que producir las primeras 1000 unidades cuesta \$11.95 cada una, en promedio; producir un ejemplar adicional, después de 1000, sólo cuesta alrededor de \$3.38. ■

EJEMPLO 8 En la fabricación y venta de x unidades de cierto bien de consumo, las funciones de precio p y de costo C (en dólares) están dadas por

$$p(x) = 5.00 - 0.002x$$

$$C(x) = 3.00 + 1.10x$$

Encuentre las expresiones para el ingreso, el costo y la utilidad marginales. Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad total.

SOLUCIÓN

$$R(x) = xp(x) = 5.00x - 0.002x^2$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = -3.00 + 3.90x - 0.002x^2$$

Así, tenemos las derivadas siguientes:

$$\text{Ingreso marginal:} \quad \frac{dR}{dx} = 5 - 0.004x$$

$$\text{Costo marginal:} \quad \frac{dC}{dx} = 1.1$$

$$\text{Utilidad marginal:} \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 3.9 - 0.004x$$

Para maximizar la utilidad hacemos $dP/dx = 0$ y resolvemos. Esto da $x = 975$ como el único punto crítico a considerar. Éste proporciona un máximo, como puede verificarse por medio del criterio de la primera derivada. La utilidad máxima es $P(975) = \$1898.25$. ■

Observe que en $x = 975$ tanto el ingreso como el costo marginales son \$1.10. En general, una compañía debe esperar el nivel de utilidad máxima cuando el costo de producir una unidad adicional es igual al ingreso proveniente de esa unidad.

Revisión de conceptos

1. Si un rectángulo de área 100 tiene largo x y ancho y, entonces los valores admisibles para x son ______.

2. El perímetro P del rectángulo de la pregunta 1 expresado en términos (sólo) de x está dado por $P =$ ______.

3. La recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen minimiza $S = \sum_{i=1}^{n} (\_\_\_\_\_)^2$

4. En economía, $\frac{dR}{dx}$ se denomina ______ y $\frac{dC}{dx}$ se denomina ______.

Conjunto de problemas 3.4

1. Encuentre dos números cuyo producto sea -16 y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.

2. ¿Para qué número la raíz cuadrada principal excede en la mayor cantidad posible a ocho veces el número?

3. ¿Para qué número la raíz cuarta principal excede en la mayor cantidad posible al doble del número?

4. Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

5. Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cerca al punto $(0, 5)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(0, 5)$.

6. Encuentre los puntos sobre la parábola $x = 2y^2$ que estén más cerca al punto $(10, 0)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(10, 0)$.

7. ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad? Comience por convencerse de que este número está en el intervalo $[0, 1]$.

8. Muestre que para un rectángulo de perímetro dado K, aquel de área máxima es un cuadrado.

9. Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados (véase el ejemplo 1).

10. Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular a un lado de su establo de 100 pies de largo, como se muestra en la figura 18 (el lado a lo largo del establo no necesita valla). ¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

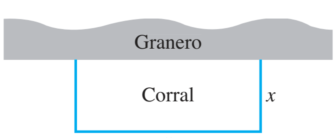


Figura 18

11. El granjero del problema 10 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre, como se muestra en la figura 19. ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

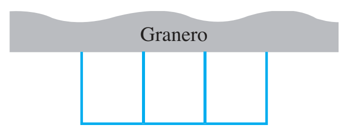


Figura 19

12. Suponga que el granjero del problema 10 tiene 180 pies de cerca de alambre y quiere que el corral quede contiguo a todo el lado del establo de 100 pies, como se muestra en la figura 20. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para tener área máxima? Observe que en este caso $0 \leq x \leq 40$.

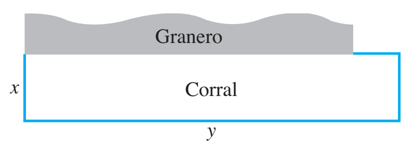


Figura 20

13. Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares idénticos, cada uno con un área de 900 pies cuadrados, como se muestra en la figura 21. ¿Cuáles son los valores de x y y, de modo que se requiera la menor cantidad de valla?

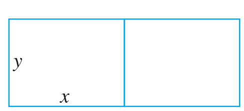


Figura 21

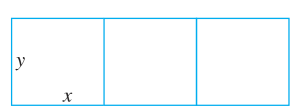


Figura 22

14. Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura 22), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

15. En el problema 14, suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero que las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo $2 por pie. ¿Qué dimensiones de x y y producirán el costo más económico para los corrales?

16. Resuelva el problema 14, suponiendo que el área de cada corral es de 900 pies cuadrados. Estudie la solución de éste y del problema 14; además, haga una conjetura acerca de la razón x/y en todos los problemas de este tipo. Demuestre su conjetura.

17. Determine los puntos P y Q en la curva $y = x^2/4, 0 \le x \le 2\sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto $(0, 4)$. *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

18. Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

19. Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

20. En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

21. En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

22. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene w pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, L pies río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta a dólares por pie tender el cable bajo el agua y b dólares por pie en tierra $(a > b)$?

23. A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

24. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible (a y b son constantes positivas).

25. Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

26. Demuestre que el rectángulo con perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo es un cuadrado.

27. ¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r?

28. La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas s pies y sus intensidades son I_1 e I_2, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?

29. Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).

30. Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

31. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?

32. Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje x, de modo que su abscisa en el instante t es

$$x = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3}\cos 2t$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

33. Una jardinera tendrá la forma de un sector circular (una región en forma de rebanada de pastel) de radio r y ángulo en el vértice de θ. Encuentre r y θ, si su área, A, es constante y el perímetro es mínimo.

34. Una barda de h pies de altura corre paralela a un edificio alto y a w pies de él (véase la figura 23). Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.

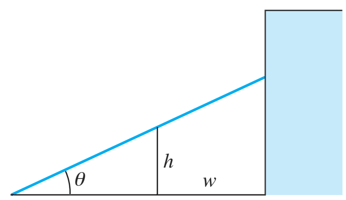


Figura 23

35. Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \ge 0$ (véase la figura 24). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

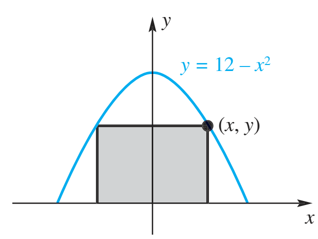


Figura 24

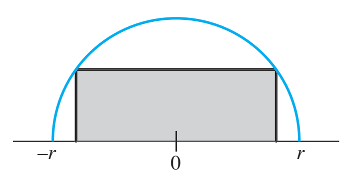


Figura 25

36. Un rectángulo se inscribirá en un semicírculo de radio r, como se muestra en la figura 25. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo, si su área debe maximizarse?

37. De todos los cilindros circulares rectos con un área de superficie dada, determine aquel con el volumen máximo. *Observación:* los extremos de los cilindros son cerrados.

38. Determine las dimensiones del rectángulo con mayor área que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

39. De todos los rectángulos con una diagonal dada, determine aquel con el área máxima.

40. Un humidificador utiliza un disco giratorio de radio r que está sumergido parcialmente en el agua. La mayor evaporación ocurre cuando la región húmeda expuesta (mostrada como la región superior sombreada en la figura 26) se maximiza. Demuestre que esto sucede cuando h (la distancia del centro al agua) es igual a $r/\sqrt{1+\pi^2}$.

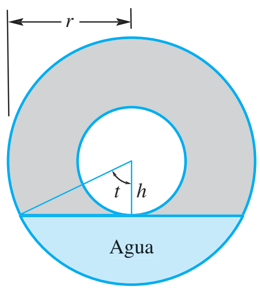


Figura 26

41. Un canalón metálico para el agua de lluvia tiene lados de 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales θ con el fondo (véase la figura 27). ¿Cuál debe ser θ para maximizar la capacidad de desalojo de agua del canalón? *Nota:* $0 \le \theta \le \theta/2$.

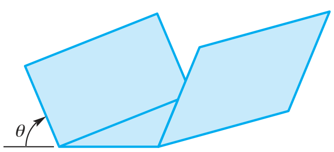


Figura 27

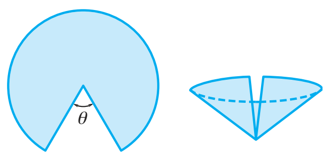


Figura 28

42. Se fabricará un gran depósito cónico con una pieza metálica circular con radio de 10 metros, cortando un sector con ángulo θ y luego soldando los lados rectos de la pieza restante (véase la figura 28). Encuentre θ, de modo que el cono resultante tenga el mayor volumen posible.

43. Con una hoja rectangular de cartón, que mide 5 por 8 pies, se confeccionará una caja con tapa. Esto se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura 29 y luego doblando por las líneas discontinuas. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z que maximizan el volumen?

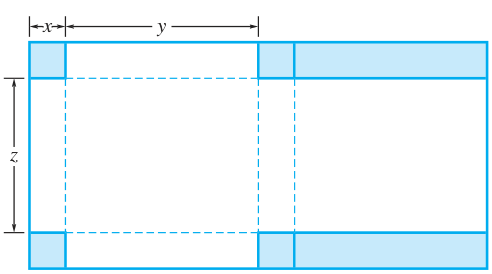


Figura 29

44. Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo? ¿Y mínimo? (Se permite la posibilidad de que se utilice toda la plata en un sólido).

45. Una esquina de una tira angosta de papel se dobla de manera que toca exactamente el lado opuesto, como se muestra en la figura 30. Con las partes marcadas como se indica, determine x para:

(a) maximizar el área del triángulo A;

(b) minimizar el área del triángulo B;

(c) minimizar la longitud z.

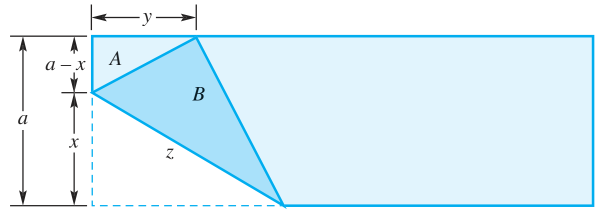


Figura 30

46. Determine θ de modo que el área de la cruz simétrica, que se muestra en la figura 31, se maximice. Después encuentre el área máxima.

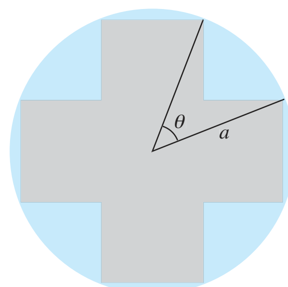


Figura 31

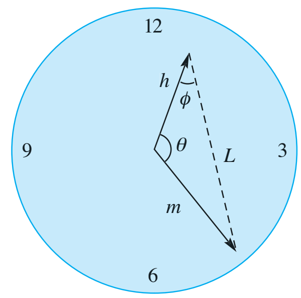


Figura 32

CAS **47.** Un reloj tiene horario y minutero de longitudes h y m, respectivamente, con $h \le m$. Queremos estudiar este reloj entre las 12:00 y las 12:30. Sean θ, ϕ y L, como se muestran en la figura 32, y observe que θ aumenta a una razón constante. Por la ley de los cosenos, $L = L(\theta) = (h^2 + m^2 - 2hm\cos\theta)^{-1/2}$ y de este modo

$$L'(\theta) = hm(h^2 + m^2 - 2hm\cos\theta)^{-1/2}\,\text{sen}\,\theta$$

(a) Para $h = 3$ y $m = 5$, determine L', L y ϕ en el instante en que L' es máxima.

(b) Vuelva a resolver la parte (a) cuando $h = 5$ y $m = 13$.

(c) Con base en las partes (a) y (b) haga conjeturas con respecto a los valores de L', L y ϕ al instante en que las puntas de las manecillas se separan más rápido.

(d) Intente demostrar sus conjeturas.

≈ C **48.** Un objeto que se arroja desde el borde de un acantilado de 100 pies, sigue la trayectoria dada por $y = -\dfrac{x^2}{10} + x + 100$.Un observador se encuentra parado a 2 pies del fondo del acantilado.

(a) Encuentre la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Encuentre la posición del objeto cuando está más lejos del observador.

≈ CAS **49.** La posición de la Tierra en el Sistema Solar, en el instante t, medido en años, puede describirse de forma aproximada por medio de $P(93\cos(2pt), 93\,\text{sen}(2pt))$, en donde el Sol está en el origen y las distancias se miden en millones de millas. Suponga que un asteroide tiene posición $Q(60\cos[2\pi(1.51t - 1)], 120\,\text{sen}[2\pi(1.51t - 1)])$. En el periodo [0, 20] (es decir, en los siguientes 20 años), ¿cuándo estará más cerca el asteroide de la Tierra? ¿Qué tan cerca estará?

50. Un folleto publicitario debe tener 50 pulgadas cuadradas para el espacio impreso con márgenes, superior e inferior, de 2 pulgadas cada uno, y cada margen lateral de una pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto requerirán el menor papel?

≈ **51.** Un extremo de una escalera de 27 pies descansa en el piso y el otro está apoyado en la parte superior de una pared de 8 pies. Cuando el extremo inferior se empuja por el piso hacia la pared, la parte superior sobresale de la pared. Encuentre la máxima distancia horizontal que sobresale el extremo superior de la escalera.

C **52.** Se produce latón en rollos largos de una hoja delgada. Para controlar la calidad, los inspectores seleccionan al azar una pieza de la hoja, miden su área y enumeran las imperfecciones en la superficie de esa pieza. El área varía de pieza a pieza. La siguiente tabla proporciona los datos del área (en pies cuadrados) de la pieza seleccionada y el número de imperfecciones encontradas en su superficie.

Pieza	Área en pies cuadrados	Número de imperfecciones en la superficie
1	1.0	3
2	4.0	12
3	3.6	9
4	1.5	5
5	3.0	8

(a) Haga un diagrama de dispersión con el área en el eje horizontal y el número de imperfecciones en el eje vertical.

(b) ¿Le parece que una recta que pasa por el origen sería un buen modelo para estos datos? Explique.

(c) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen.

(d) Utilice el resultado de la parte (c) para predecir cuántas imperfecciones en la superficie tendría una hoja con área de 2.00 pies cuadrados.

C **53.** Suponga que cada orden del cliente tomada por la compañía XYZ requiere de exactamente 5 horas de trabajo para el papeleo; este intervalo de tiempo es *fijo* y no varía de lote a lote. Entonces, el número de horas requeridas y para fabricar y vender un lote de tamaño x sería:

$$y = (\text{número de horas para producir un lote de tamaño } x) + 5$$

En la siguiente tabla se dan algunos datos de los estantes de la compañía XYZ.

Orden	Tamaño de lote, x	Total de horas de trabajo
1	11	38
2	16	52
3	8	29
4	7	25
5	10	38

(a) A partir de la descripción del problema, la recta de mínimos cuadrados tiene 5 como su intersección con el eje y. Encuentre una fórmula para el valor de la pendiente b que minimiza la suma de los cuadrados

$$S = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (5 + bx_i)]^2$$

(b) Utilice esta fórmula para estimar la pendiente b.

(c) Utilice su recta de mínimos cuadrados para predecir el número total de horas de trabajo para producir un lote que consiste en 15 libreros.

54. Los costos fijos mensuales de operar una planta que fabrica ciertos artículos es de \$7000, mientras que el costo de fabricación de cada unidad es de \$100. Escriba una expresión para $C(x)$, el costo total de producir x artículos en un mes.

55. El fabricante de los artículos del problema anterior estima que pueden venderse 100 unidades por mes, si el precio unitario es de \$250 y que las ventas aumentan en 10 unidades por cada disminución de \$5 en el precio. Escriba una expresión para el precio $p(n)$ y el ingreso $R(n)$, si se venden n unidades en un mes, $n \geq 100$.

56. Utilice la información en los problemas 54 y 55 para escribir una expresión para la utilidad total mensual $P(n)$, $n \geq 100$.

57. Dibuje la gráfica de $P(n)$ del problema 56 y con base en ella estime el valor de n que maximiza P. Encuentre exactamente n por medio de los métodos de cálculo.

C **58.** El costo total de producir y vender x unidades mensuales de cierto artículo es $C(x) = 100 + 3.002x - 0.0001x^2$. Si el nivel de producción es de 1600 unidades mensuales, encuentre el costo promedio, $C(x)/x$, de cada unidad y el costo marginal.

59. El costo total de producir y vender, por semana, n unidades de cierto bien de consumo es $C(n) = 1000 + n^2/1200$. Encuentre el costo promedio, $C(n)/n$, de cada unidad y el costo marginal de un nivel de producción de 800 unidades semanales.

60. El costo total de producir y vender $100x$ unidades a la semana de un bien en particular es

$$C(x) = 1000 + 33x - 9x^2 + x^3$$

Encuentre (a) el nivel de producción en el que el costo marginal es mínimo, y (b) el costo marginal mínimo.

61. Una función de precio, p, está definida por

$$p(x) = 20 + 4x - \frac{x^2}{3}$$

donde $x \geq 0$ es el número de unidades.

(a) Encuentre la función de ingreso total y la función de ingreso marginal.

(b) ¿En qué intervalo es creciente el ingreso total?

(c) ¿Para qué número x el ingreso marginal es máximo?

C **62.** Para la función de precio definida por

$$p(x) = (182 - x/36)^{1/2}$$

encuentre el número de unidades x_1 que hace que sea máximo el ingreso total y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

63. Para la función de precio dada por

$$p(x) = 800/(x + 3) - 3$$

encuentre el número de unidades x_1 que hacen máximo el ingreso total, y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

64. Por el día de la independencia, una compañía de viajes por río ofrece una excursión a una organización fraternal, bajo el entendido de que será para 400 paseantes, por lo menos. El precio de cada boleto será de \$12.00 y la compañía acepta hacer un descuento de \$0.20 por cada 10 pasajeros que excedan a 400. Escriba una expresión para la función del precio $p(x)$ y encuentre el número x_1 de pasajeros que hacen máximo el ingreso total.

65. La compañía XYZ fabrica sillas de mimbre. Con sus actuales máquinas, tiene una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede establecer un precio de $p(x) = 200 - 0.15x$ dólares para cada una y tendrá un costo total por año de $C(x) = 5000 + 6x - 0.002x^2$ dólares. La compañía tiene la oportunidad de comprar una máquina nueva por \$4000, con lo que aumentaría su producción en 250 sillas anuales. Por lo tanto, la función de costo para valores de x entre 500 y 750 es $C(x) = 9000 + 6x - 0.002x^2$. Con base en su análisis de la utilidad para el año siguiente, responda las siguientes preguntas.

(a) ¿La compañía debe comprar la máquina adicional?

(b) ¿Cuál debe ser el nivel de producción?

66. Repita el problema 65, suponiendo que la máquina adicional cuesta \$3000.

C **67.** La compañía ZEE fabrica ciertos objetos, los cuales se venden a un precio de $p(x) = 10 - 0.001x$ dólares, donde x es el número producido cada mes. Su costo mensual total es $C(x) = 200 + 4x - 0.01x^2$. En el máximo de producción puede fabricar 300 unidades. ¿Cuál es su utilidad mensual máxima y qué nivel de producción proporciona esta utilidad?

C **68.** Si la compañía del problema 67 amplía sus instalaciones de modo que puede producir hasta 450 unidades mensuales, su función de costo mensual toma la forma $C(x) = 800 + 3x - 0.01x^2$ para $300 < x \le 450$. Determine el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual y efectúe un cálculo de ésta. Haga un bosquejo de la gráfica de la función de utilidad mensual, $P(x)$ en $0 \le x \le 450$.

EXPL **69.** La media aritmética de los números a y b es $(a+b)/2$, y la media geométrica de dos números positivos, a y b, es $\sqrt{ab}$. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

(a) Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando, demuestre que se cumple $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$.

(b) Utilice cálculo para demostrar que $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$. *Sugerencia:* considere a fija. Eleve ambos lados de la desigualdad al cuadrado y divida entre b. Defina la función $F(b) = (a+b)^2/4b$. Demuestre que F tiene su mínimo en a.

(c) La media geométrica de tres números positivos, a, b y c, es $(abc)^{1/3}$. Demuestre que se cumple la desigualdad análoga:

$$(abc)^{1/3} \le \frac{a+b+c}{3}$$

Sugerencia: considere a y c fijas y defina $F(b) = (a+b+c)^3/27b$. Demuestre que F tiene un mínimo en $b = (a+c)/2$ y que este mínimo es $[(a+b)/2]^2$. Luego utilice el resultado de la parte (b).

EXPL **70.** Demuestre que de todas las cajas de tres dimensiones con un área de superficie dada, el cubo tiene el volumen máximo. *Sugerencia:* el área de la superficie es $S = 2(lw + lh + hw)$ y el volumen es $V = lwh$. Sea $a = lw$, $b = lh$ y $c = wh$. Utilice el problema anterior para demostrar que $(V^2)^{1/3} \le S/6$. ¿Cuándo se satisface como igualdad?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $0 < x < \infty$ **2.** $2x + 200/x$ **3.** $y_i - bx_i$ **4.** ingreso marginal; costo marginal.

3.5 Graficación de funciones mediante cálculo

En la sección 0.4, nuestro tratamiento de graficación fue elemental. Propusimos trazar suficientes puntos, de modo que las características esenciales de la gráfica fuesen claras. Mencionamos que las simetrías de la gráfica podrían reducir el esfuerzo necesario. Sugerimos que uno debe estar alerta a posibles asíntotas. Pero si la ecuación a graficar es complicada o si queremos una gráfica precisa, las técnicas de esa sección no son adecuadas.

El cálculo proporciona una herramienta poderosa para analizar la estructura fina de una gráfica, en especial para identificar los puntos en donde cambian las características de la gráfica. Podemos localizar puntos máximos locales, puntos mínimos locales y puntos de inflexión; podemos determinar, con precisión, en dónde la gráfica es creciente o en dónde es cóncava hacia arriba. La inclusión de todas estas ideas en nuestro procedimiento para graficar es el programa de esta sección.

Funciones polinomiales Un polinomio de grado 1 o 2 es fácil de graficar a mano; uno de grado 50 sería casi imposible. Si el grado es de tamaño modesto, como 3 o 6, podemos utilizar las herramientas de cálculo con gran ventaja.

EJEMPLO 1 Haga la gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

SOLUCIÓN Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar y, por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Haciendo $f(x) = 0$, encontramos que las intersecciones con el eje x son 0 y $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2.6$. Podemos llegar hasta aquí sin cálculo.

Cuando derivamos f, obtenemos

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$$

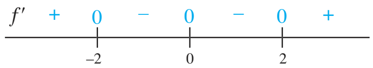


Figura 1

Figura 2

Así, los puntos críticos son −2, 0 y 2; rápidamente descubrimos que (véase la figura 1) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, y que $f'(x) < 0$ en $(-2, 0)$ y en $(0, 2)$. Estos hechos nos dicen en dónde f es creciente y en dónde es decreciente; también confirman que $f(-2) = 2$ es un valor máximo local y que $f(2) = -2$ es un valor mínimo local.

Al derivar nuevamente, obtenemos

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{8}$$

Mediante un estudio del signo de $f''(x)$ (véase la figura 2) deducimos que f es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$, y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Por lo tanto, existen tres puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8\right) \approx (-1.4, 1.2)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8\right) \approx (1.4, -1.2)$.

Gran parte de esta información está reunida en la parte superior de la figura 3 que usamos para dibujar la gráfica que está abajo de ella.

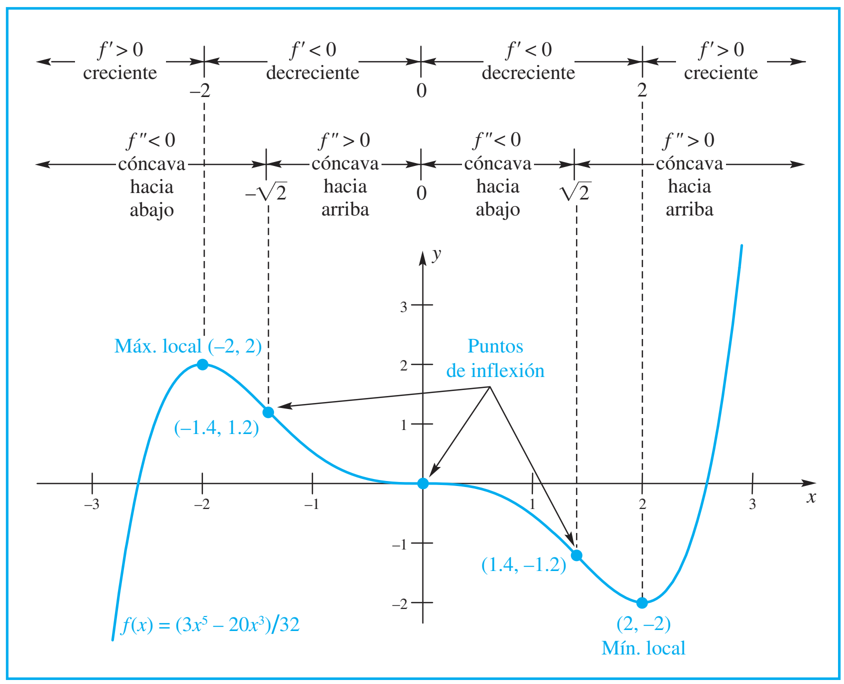


Figura 3

■

Funciones racionales Una función racional, que es el cociente de dos funciones polinomiales, es considerablemente más complicada de graficar que un polinomio. En particular, podemos esperar un comportamiento difícil cerca de donde el denominador se haga cero.

EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

SOLUCIÓN Esta función no es par ni impar, así que no tiene ninguna de las simetrías comunes. No hay intersecciones con el eje x, ya que las soluciones de $x^2 - 2x + 4 = 0$ no son números reales. La intersección con el eje y es −2. Anticipamos una asíntota vertical en $x = 2$. De hecho,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

Al derivar dos veces se obtiene

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Por lo tanto, los puntos estacionarios son $x = 0$ y $x = 4$.

Así, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 4)$. (Recuerde que $f'(x)$ no existe cuando $x = 2$). También, $f''(x) > 0$ en $(2, \infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$. Como $f''(x)$ nunca es cero, no hay puntos de inflexión. Por otra parte, $f(0) = -2$ y $f(4) = 6$ dan los valores máximo y mínimo locales, respectivamente.

Es una buena idea verificar el comportamiento de $f(x)$ para $|x|$ grande. Como

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$$

la gráfica de $y = f(x)$ se acerca cada vez más a la recta $y = x$ cuando $|x|$ se hace cada vez más grande. Llamamos a la recta $y = x$ **asíntota oblicua** para la gráfica de f (véase el problema 49 de la sección 1.5).

Con toda esta información, somos capaces de trazar una gráfica bastante precisa (véase la figura 4).

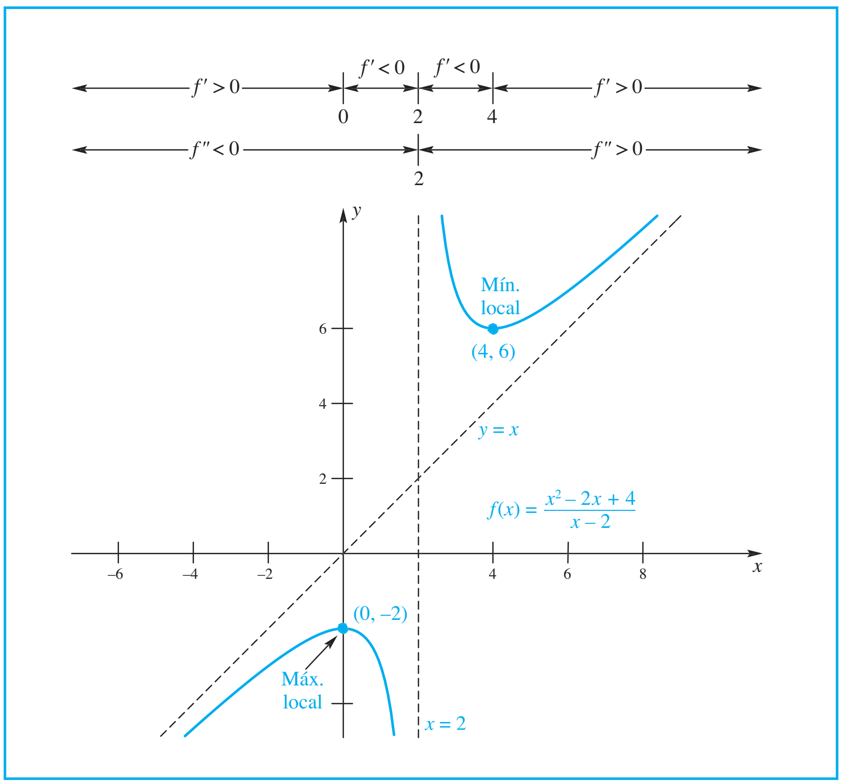


Figura 4

■

Funciones en las que aparecen raíces Existe una variedad infinita de funciones que implican raíces. Aquí está un ejemplo.

EJEMPLO 3 Analice la función

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}(x - 5)^2}{4}$$

y dibuje su gráfica.

SOLUCIÓN El dominio de F es $[0, \infty)$ y el rango es $[0, \infty)$, de modo que la gráfica de F está confinada al primer cuadrante y la parte positiva de los ejes de coordenadas. Las intersecciones con el eje x son 0 y 5; y la intersección con el eje y es 0. De

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

encontramos los puntos estacionarios 1 y 5. Como $F'(x) > 0$ en $(0, 1)$ y $(5, \infty)$, mientras que $F'(x) < 0$ en $(1, 5)$, concluimos que $F(1) = 4$ es un valor máximo local y $F(5) = 0$ es un valor mínimo local.

Hasta aquí, todo va viento en popa. Pero al calcular la segunda derivada obtenemos

$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \qquad x > 0$$

que es muy complicada. Sin embargo, $3x^2 - 6x - 5 = 0$ tiene una solución en $(0, \infty)$, a saber, $1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2.6$.

Utilizando los puntos de prueba 1 y 3 concluimos que $f''(x) < 0$ en $(0, 1 + 2\sqrt{6}/3$ y $f''(x) > 0$ en $(1 + 2\sqrt{6}/3, \infty)$. Entonces, se deduce que el punto $\left(1 + 2\sqrt{6}/3, F(1 + 2\sqrt{6}/3)\right)$, es un punto de inflexión.

Cuando x crece, $F(x)$ crece sin cota y mucho más rápido que cualquier función lineal; no hay asíntotas. La gráfica se dibuja en la figura 5. ■

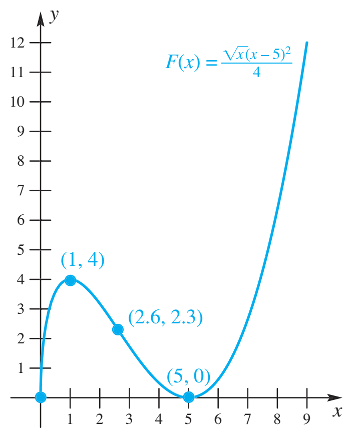


Figura 5

Resumen del método Al graficar funciones no hay sustituto para el sentido común. Sin embargo, el procedimiento siguiente será útil en la mayoría de los casos.

Paso 1: Haga un análisis antes de utilizar cálculo.

(a) Verifique el *dominio* y el *rango* de la función para ver si existen regiones en el plano que están excluidas.

(b) Verifique la *simetría* con respecto al eje y y al origen. (¿La función es par o impar?)

(c) Encuentre las *intersecciones con los ejes de coordenadas*.

Paso 2: Análisis con cálculo.

(a) Utilice la primera derivada para encontrar los puntos críticos y determinar en dónde la gráfica es *creciente* y en dónde es *decreciente*.

(b) Verifique los puntos críticos para saber si son *máximos* o *mínimos locales*.

(c) Utilice la segunda derivada para determinar en dónde la gráfica es *cóncava hacia arriba* y en dónde es *cóncava hacia abajo*, y para localizar *puntos de inflexión*.

(d) Encuentre las *asíntotas*.

Paso 3: Dibuje algunos puntos (incluya todos los puntos críticos y los puntos de inflexión).

Paso 4: Haga un bosquejo de la gráfica.

EJEMPLO 4 Haga un bosquejo de las gráficas de $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^{2/3}$ y de sus derivadas.

SOLUCIÓN El dominio de ambas funciones es $(-\infty, \infty)$. (Recuerde que la raíz cúbica existe para todo número real). El rango para $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$, ya que cada número real es la raíz cúbica de algún otro número. Al escribir $g(x)$ como $g(x) = x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, vemos que $g(x)$ debe ser no negativa; su rango es $[0, \infty)$. Como $f(-x) = (-x)^{1/3} = -x^{1/3} = -f(x)$, vemos que f es una función impar. De forma análoga, como $g(-x) = (-x)^{2/3} = ((-x)^2)^{1/3} = (x^2)^{1/3} = g(x)$, vemos que g es una función par. Las primeras derivadas son

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

y

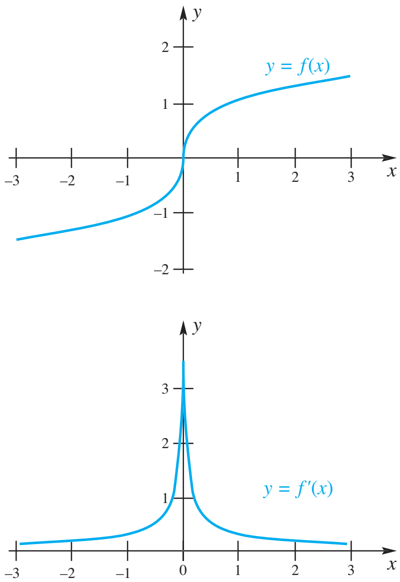


Figura 6

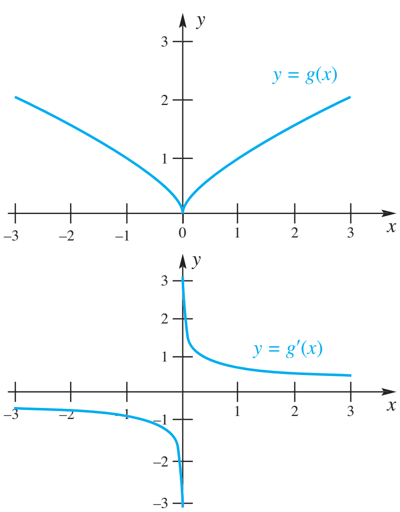


Figura 7

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

y las segundas derivadas son

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

y

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} = -\frac{2}{9x^{4/3}}$$

Para ambas funciones el único punto crítico, en este caso un punto en donde la derivada no existe, es $x = 0$

Observe que $f'(x) > 0$ para toda x, excepto $x = 0$. Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y también en $[0, \infty)$; pero como f es continua en $(-\infty, \infty)$, podemos concluir que f siempre es creciente. En consecuencia, f no tiene máximo ni mínimo locales. Como $f''(x)$ es positiva cuando x es negativa y negativa cuando x es positiva (e indefinida cuando $x = 0$), concluimos que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$ El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque es en donde la concavidad cambia.

Ahora considere $g(x)$. Observe que $g'(x)$ es negativa cuando x es negativa y positiva cuando x es positiva. Como g es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, $g(0) = 0$ es un mínimo local. También observe que $g''(x)$ es negativa siempre que $x \neq 0$. Por lo tanto, g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$, así que $(0, 0)$ no es un punto de inflexión. Las gráficas de $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se muestran en las figuras 6 y 7. ■

Observe que en el ejemplo anterior ambas funciones tienen un punto crítico, $x = 0$, en donde la derivada no está definida. Sin embargo, las gráficas de las funciones son fundamentalmente diferentes. La gráfica de $y = f(x)$ tiene una recta tangente en todos los puntos, pero es vertical cuando $x = 0$. (Si la recta tangente es vertical, entonces la derivada no existe en ese punto). La gráfica de $y = g(x)$ tiene un punto esquina, denominada **pico**, en $x = 0$.

Uso de la gráfica de la derivada para graficar una función El solo hecho de conocer la derivada de la función puede decirnos mucho acerca de la función misma y cuál es la apariencia de su gráfica.

EJEMPLO 5 La figura 8 muestra una gráfica de $y = f'(x)$. Determine todos los extremos locales y puntos de inflexión de f en el intervalo $[-1, 3]$. Dado que $f(1) = 0$, haga un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$

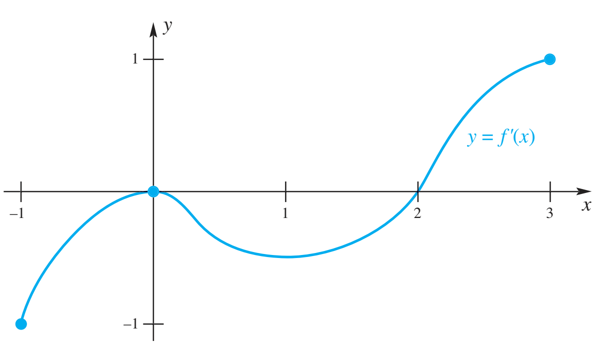


Figura 8

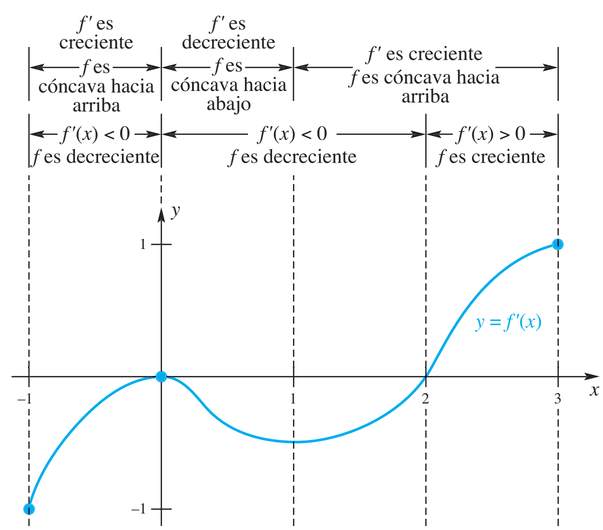


Figura 9

SOLUCIÓN La derivada es negativa en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$ y positiva en el intervalo $(2, 3)$. Por lo tanto, f es decreciente en $[-1, 0]$ y en $[0, 2]$, por lo que hay un máximo local en el punto fronterizo izquierdo $x = -1$. Como $f'(x)$ es positivo en $(2, 3)$, f es creciente en $[2, 3]$, por lo que existe un máximo local en el punto fronterizo derecho $x = 3$. Ya que f es decreciente en $[-1, 2]$ y creciente en $[2, 3]$, existe un mínimo local en $x = 2$. La figura 9 resume esta información.

$f(-1)$	Máximo local
$f(2)$	Mínimo local
$f(3)$	Máximo local
$(0, f(0))$	Punto de inflexión
$(1, f(1))$	Punto de inflexión

Los puntos de inflexión para f se producen cuando la concavidad de f cambia. Como f' es creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$. Ya que f' es decreciente en $(0, 1)$, f es cóncava hacia abajo en $(0, 1)$. Así que, f cambia de concavidad en $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto, los puntos de inflexión son $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$

La información anterior, junto con el hecho de que $f(1) = 0$, puede usarse para trazar la gráfica de $y = f(x)$. (Este dibujo no puede ser demasiado preciso ya que aún tenemos información limitada acerca de f). En la figura 10 se muestra un bosquejo.

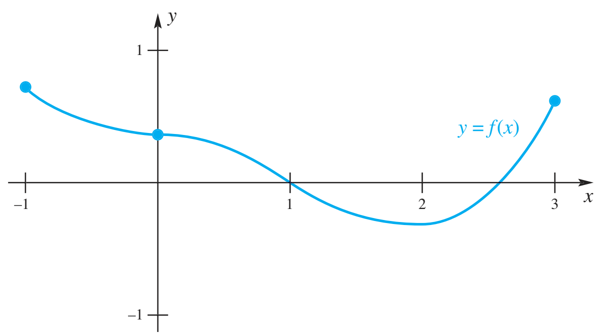


Figura 10 ■

Revisión de conceptos

1. La gráfica de f es simétrica respecto al eje y si $f(-x) =$ _____ para toda x; la gráfica es simétrica con respecto al origen si $f(-x) =$ _____ para toda x.

2. Si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es _____ y _____ en I.

3. La gráfica de $f(x) = x^3/[(x+1)(x-2)(x-3)]$ tiene como asíntotas verticales las rectas _____ y como asíntota horizontal la recta _____.

4. Llamamos a $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 6$ una función _____ y llamamos a $g(x) = (3x^5 - 2x^2 + 6)/(x^2 - 4)$ una función _____.

Conjunto de problemas 3.5

En los problemas del 1 al 27 haga un análisis como el sugerido en el resumen anterior y después elabore un bosquejo de la gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **2.** $f(x) = 2x^3 - 3x - 10$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

4. $f(x) = (x - 1)^3$ **5.** $G(x) = (x - 1)^4$

6. $H(t) = t^2(t^2 - 1)$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$

8. $F(s) = \dfrac{4s^4 - 8s^2 - 12}{3}$

9. $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **10.** $g(s) = \dfrac{(s - \pi)^2}{s}$

11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ **12.** $\Lambda(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$

13. $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ **14.** $P(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$ **16.** $w(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z}$

17. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$

18. $f(x) = |x|^3$ *Sugerencia:* $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$

19. $R(z) = z|z|$ **20.** $H(q) = q^2|q|$

21. $g(x) = \dfrac{|x| + x}{2}(3x + 2)$

22. $h(x) = \dfrac{|x| - x}{2}(x^2 - x + 6)$

23. $f(x) = |\text{sen } x|$ **24.** $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

25. $h(t) = \cos^2 t$ **26.** $g(t) = \tan^2 t$

C **27.** $f(x) = \dfrac{5.235x^3 - 1.245x^2}{7.126x - 3.141}$

28. Bosqueje la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(0) = 0, f(1) = 2$;

(c) f es una función par; (d) $f'(x) > 0$ para $x > 0$;

(e) $f''(x) > 0$ para $x > 0$.

29. Trace la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(2) = -3, f(6) = 1$;

(c) $f'(2) = 0, f'(x) > 0$ para $x \neq 2, f'(6) = 3$;

(d) $f''(6) = 0, f''(x) > 0$ para $2 < x < 6, f''(x) < 0$ para $x > 6$;

30. Bosqueje la gráfica de una función g que tenga las siguientes propiedades:

(a) g es *suave* en todas partes (continua y con primera derivada continua);

(b) $g(0) = 0$; (c) $g'(x) < 0$ para toda x;

(d) $g''(x) < 0$ para $x < 0$ y $g''(x) > 0$ para $x > 0$

31. Haga la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-3) = 1$;

(c) $f'(x) < 0$ para $x < -3, f'(x) > 0$ para $x > -3, f''(x) < 0$ para $x \neq 3$.

32. Elabore la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-4) = -3, f(0) = 0, f(3) = 2$;

(c) $f'(-4) = 0, f'(3) = 0, f'(x) > 0$ para $x < -4, f'(x) > 0$ para $-4 < x < 3, f'(x) < 0$ para $x > 3$;

(d) $f''(-4) = 0, f''(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x < -4, f''(x) > 0$ para $-4 < x < 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$.

33. Bosqueje la gráfica de una función f que

(a) tenga primera derivada continua;

(b) sea descendente y cóncava hacia arriba para $x < 3$

(c) tenga un extremo en el punto $(3, 1)$;

(d) sea ascendente y cóncava hacia arriba para $3 < x < 5$;

(e) tenga un punto de inflexión en $(5, 4)$;

(f) sea ascendente y cóncava hacia abajo para $5 < x < 6$;

(g) tenga un extremo en $(6, 7)$;

(h) sea descendente y cóncava hacia abajo para $x > 6$.

GC *Las aproximaciones lineales proporcionan una buena aproximación, en particular cerca de los puntos de inflexión. Mediante una calculadora gráfica uno puede investigar con facilidad tal comportamiento en los problemas del 34 al 36.*

34. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y su aproximación lineal $L(x) = x$ en el punto de inflexión $x = 0$.

35. Grafique $y = \cos x$ y su aproximación lineal $L(x) = -x + \pi/2$ en $x = \pi/2$.

36. Encuentre la aproximación lineal a la curva $y = (x - 1)^5 + 3$ en su punto de inflexión. Grafique tanto la función como su aproximación lineal en la vecindad del punto de inflexión.

37. Suponga que $f'(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ y $f(2) = 2$. Haga una gráfica de $y = f(x)$.

38. Suponga que $f'(x) = (x - 3)(x - 2)^2(x - 1)$ y $f(2) = 0$. Bosqueje una gráfica de $f(x)$.

39. Suponga que $h'(x) = x^2(x - 1)^2(x - 2)$ y $h(0) = 0$. Elabore una gráfica de $y = h(x)$.

40. Considere una curva cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$. Demuestre que tal curva no tiene puntos de inflexión.

41. Demuestre que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en donde $a \neq 0$, tiene exactamente un punto de inflexión.

42. Considere una curva general de cuarto grado $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $a \neq 0$. ¿Cuál es el número máximo de puntos de inflexión que tal curva puede tener?

EXPL CAS *En los problemas del 43 al 47 la gráfica de $y = f(x)$ depende de un parámetro c. Mediante un CAS investigue cómo dependen los puntos extremos y los puntos de inflexión del valor de c. Identifique los valores extremos de c en los cuales cambia la forma básica de las curvas.*

43. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - c^2}$ **44.** $f(x) = \dfrac{cx}{4 + (cx)^2}$

45. $f(x) = \dfrac{1}{(cx^2 - 4)^2 + cx^2}$ **46.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + c}$

47. $f(x) = c + \operatorname{sen} cx$

48. Con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$, ¿qué conclusiones puede obtener acerca de f?

49. Sea $g(x)$ una función que tiene dos derivadas y satisface las siguientes propiedades:

(a) $g(1) = 1$;

(b) $g'(x) > 0$, para toda $x \neq 1$;

(c) g es cóncava hacia abajo para toda $x < 1$ y cóncava para arriba para toda $x > 1$;

(d) $f(x) = g(x^4)$.

Haga un bosquejo de una posible gráfica de $f(x)$ y justifique su respuesta.

50. Suponga que $H(x)$ tiene tres derivadas continuas, y sea tal que $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, pero $H'''(1) \neq 0$. ¿Tiene $H(x)$ un máximo relativo, mínimo relativo o un punto de inflexión en $x = 1$? Justifique su respuesta.

51. En cada caso, ¿es posible para una función F con dos derivadas continuas satisfacer todas las propiedades siguientes? Si es así, grafique tal función. En caso contrario, justifique su respuesta.

(a) $F'(x) > 0, F''(x) > 0$, mientras que $F(x) < 0$ para toda x.

(b) $F''(x) < 0$, mientras $F(x) > 0$.

(c) $F''(x) < 0$, mientras $F'(x) > 0$.

GC **52.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para trazar las gráficas de cada una de las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Determine las coordenadas de los extremos globales y de los puntos de inflexión, si existen. Usted debe ser capaz de dar respuestas que tengan al menos una precisión de un decimal. Restrinja la ventana del eje y a $-5 \leq y \leq 5$.

(a) $f(x) = x^2 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = x^3 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x; [-\pi, \pi]$

(d) $f(x) = x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}; [-\pi, \pi]$

GC **53.** Cada una de las siguientes funciones es periódica. Utilice una calculadora gráfica o un CAS para hacer las gráficas de cada una de las siguientes funciones en un periodo completo con el centro en el intervalo ubicado en el origen. Determine las coordenadas, si las hay, de los extremos globales y los puntos de inflexión. Debe ser capaz de dar las respuestas que tengan una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos^2 x$ (b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

(c) $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ (d) $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$

(e) $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$

54. Sea f una función continua con $f(-3) = f(0) = 2$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como se muestra en la figura 6, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

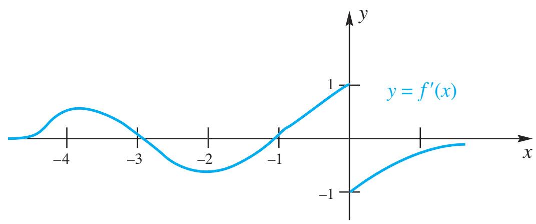


Figura 11

55. Sea f una función continua y suponga que la gráfica de f' es la que se muestra en la figura 12. Bosqueje una posible gráfica para f y responda las siguientes preguntas.

(a) ¿En dónde es creciente f? ¿En dónde es decreciente?

(b) ¿En dónde es cóncava hacia arriba? ¿En dónde es cóncava hacia abajo?

(c) ¿En dónde f alcanza un máximo local? ¿Y un mínimo local?

(d) ¿En dónde están los puntos de inflexión para f?

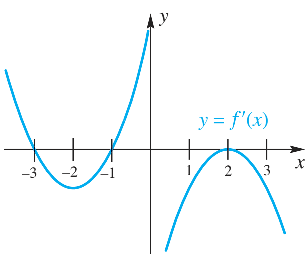


Figura 12

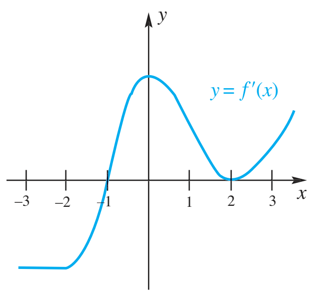


Figura 13

56. Repita el problema 55 para la figura 13.

57. Sea f una función continua con $f(0) = f(2) = 0$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 7, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

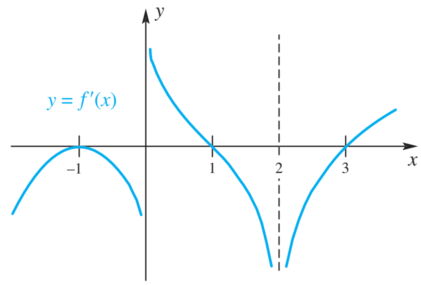


Figura 14

58. Suponga que $f'(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)$ y $f(1) = 2$. Haga un bosquejo de una posible gráfica de f.

GC **59.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones en $[-1, 7]$. Determine las coordenadas, si existen, de los extremos globales y puntos de inflexión. Usted debe ser capaz de dar respuestas con una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 6x + 40}$

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 - 6x + 40)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 40}/(x - 2)$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}[(x^2 - 6x + 40)/6]$

GC **60.** Repita el problema 59 para las funciones siguientes.

(a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 4$

(b) $f(x) = |x^3 - 8x^2 + 5x + 4|$

(c) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x - 1)$

(d) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x^3 + 1)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(x)$; $-f(x)$ **2.** decreciente; cóncava hacia arriba **3.** $x = -1, x = 2, x = 3$; $y = 1$ **4.** polinomial; racional.

3.6 El teorema del valor medio para derivadas

En lenguaje geométrico, el teorema del valor medio es fácil de formular y entender. Dice que si la gráfica de una función continua tiene una recta tangente, que no sea vertical, en cada punto entre A y B, entonces existe al menos un punto C en la gráfica entre A y B en el cual la recta tangente es paralela a la recta secante AB. En la figura 1 existe exactamente un punto C; en la figura 2 existen varios. Primero formulamos el teorema en el lenguaje de funciones y después lo demostramos.

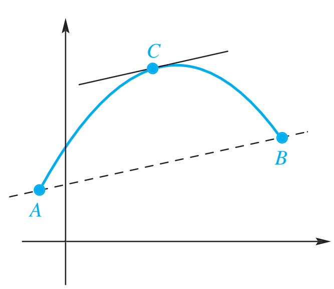


Figura 1

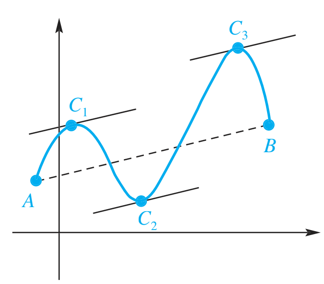


Figura 2

Teorema A **Teorema del valor medio para derivadas**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior (a, b), entonces existe al menos un número c en (a, b) donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

o, de manera equivalente, donde

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

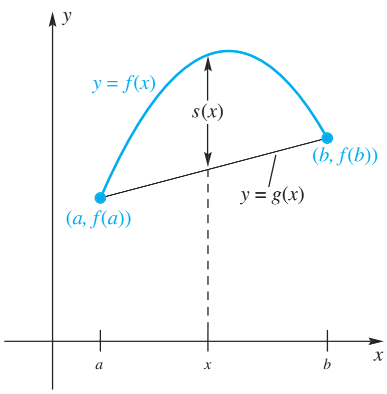


Figura 3

La clave de una demostración

La clave de esta demostración es que c es el valor en el cual $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y $s'(c) = 0$. Muchas demostraciones tienen una o dos ideas clave; si usted entiende la clave, comprenderá la demostración.

Demostración Nuestra demostración se apoya en un análisis cuidadoso de la función $s(x) = f(x) - g(x)$, introducida en la figura 3. Aquí, $y = g(x)$ es la ecuación de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como la recta tiene pendiente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y pasa por $(a, f(a))$, la ecuación en la forma punto pendiente es

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esto, a su vez, da una fórmula para $s(x)$:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Observe de inmediato que $s(b) = s(a) = 0$ y que, para x en (a, b),

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ahora hacemos una observación crucial. Si supiésemos que hay un número c en (a, b) que satisface $s'(c) = 0$, estaría todo hecho. Pues entonces la última ecuación diría que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es equivalente a la conclusión del teorema.

Para ver que $s'(c) = 0$ para alguna c en (a, b), razónese como sigue. Es claro que s es continua en $[a, b]$, ya que es la diferencia de dos funciones continuas. Así, por el teorema de existencia de máximo y mínimo (teorema 3.1A), s debe alcanzar tanto el valor máximo como el mínimo en $[a, b]$. Si ambos valores se presentan en cero, entonces $s(x)$ es idénticamente cero en $[a, b]$, y en consecuencia $s'(x) = 0$ para toda x en (a, b), mucho más de lo que necesitamos.

Si el valor máximo —o el valor mínimo— es diferente de cero, entonces ese valor se alcanza en un punto interior c, ya que $s(a) = s(b) = 0$. Ahora, s tiene derivada en cada punto de (a, b), de modo que, por el teorema del punto crítico (teorema 3.1B), $s'(c) = 0$. Esto es todo lo que necesitábamos saber. ■

Ilustración del teorema

EJEMPLO 1 Encuentre el número c garantizado por el teorema del valor medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, 4]$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

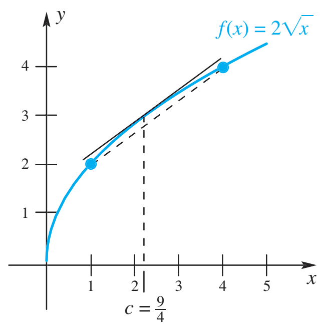


Figura 4

Así, debemos resolver

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

La única solución es $c = \frac{9}{4}$ (véase la figura 4). ■

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ en $[-1, 2]$. Encuentre todos los números c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de la función f. Con base en esta gráfica, parece que existen dos números c_1 y c_2 con la propiedad que se pide. Ahora encontramos

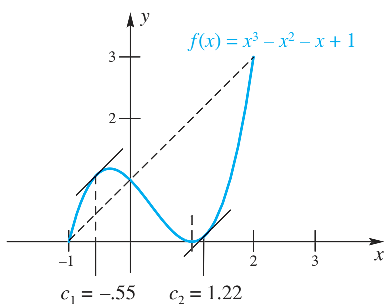


Figura 5

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

y

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Por lo tanto, debemos resolver

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

o, de manera equivalente,

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

Por la fórmula cuadrática, existen dos soluciones $\left(2 \pm \sqrt{4 + 24}\right)/6$, que corresponden a $c_1 \approx -0.55$ y $c_2 \approx 1.22$. Ambos números están en el intervalo $(-1, 2)$. ■

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^{2/3}$ en $[-8, 27]$. Demuestre que no se cumple la conclusión del teorema del valor medio y explique por qué.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \qquad x \neq 0$$

y

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Debemos resolver

$$\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7}$$

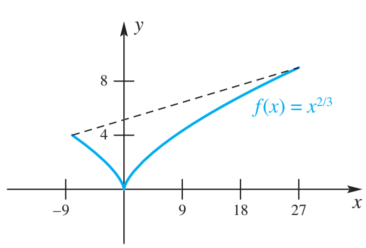


Figura 6

lo cual da

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

Pero $c = 102$ no pertenece al intervalo $(-8, 27)$ como se requiere. Y como lo sugiere la gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 6), $f'(0)$ no existe, de modo que el problema es que $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo $(-8, 27)$. ■

Si la función $s(t)$ representa la posición de un objeto en el instante t, entonces el teorema del valor medio establece que en cualquier intervalo de tiempo existe algún instante para el que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

EJEMPLO 4 Suponga que un objeto tiene una función de posición $s(t) = t^2 - t - 2$. Determine la velocidad promedio sobre el intervalo $[3, 6]$ y encuentre el instante en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

SOLUCIÓN La velocidad promedio en el intervalo $[3, 6]$ es igual a $(s(6) - s(3))/(6 - 3) = 8$. La velocidad instantánea es $s'(t) = 2t - 1$. Para determinar el punto en donde la velocidad promedio es igual a la velocidad instantánea, igualamos $8 = 2t - 1$, y despejamos t para obtener $t = 9/2$. ■

Uso del teorema En la sección 3.2 prometimos una demostración rigurosa del teorema de monotonía (teorema 3.2A). Éste es el teorema que relaciona el signo de la derivada de una función con el hecho de que la función sea creciente o decreciente.

Demostración del teorema de monotonía Supongamos que f es continua en I y que $f'(x) > 0$ en cada punto x interior de I. Considere cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de I, con $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio aplicado al intervalo $[x_1, x_2]$, existe un número c en (x_1, x_2) que satisface

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(c) > 0$, vemos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$; es decir, $f(x_2) > f(x_1)$. Esto es lo que queremos decir cuando aseguramos que f es creciente en I.

El caso en el que $f'(x) < 0$ en I se maneja de manera análoga. ■

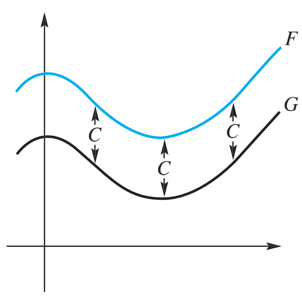


Figura 7

Nuestro siguiente teorema se usará de manera repetida en el capítulo siguiente. En palabras, dice que *dos funciones con la misma derivada difieren en una constante*, posiblemente la constante cero (véase la figura 7).

Teorema B

Si $F'(x) = G'(x)$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C, tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para toda x en (a, b).

Geometría y álgebra

Como en la mayoría de los temas de este texto, usted debe intentar ver las cosas desde un punto de vista algebraico y otro geométrico. De manera geométrica, el teorema B dice que si F y G tienen la misma derivada, entonces la gráfica de G es una traslación vertical de la gráfica de F.

Demostración Sea $H(x) = F(x) - G(x)$. Entonces

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Selecciónese x_1 como algún punto (fijo) en (a, b) y sea x cualquier otro punto allí. La función H satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo cerrado con puntos fronterizos x_1 y x. Así que existe un número c entre x_1 y x, tal que

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Pero, por hipótesis $H'(c) = 0$. Por lo tanto, $H(x) - H(x_1) = 0$, o de manera equivalente $H(x) = H(x_1)$ para toda x en (a, b). Como $H(x) = F(x) - G(x)$, concluimos que $F(x) - G(x) = H(x_1)$. Ahora sea $C = H(x_1)$, y tenemos la conclusión $F(x) = G(x) + C$. ■

Revisión de conceptos

1. El teorema del valor medio para derivadas dice que si f es ________ en $[a, b]$ y derivable en ________ entonces existe un punto c en (a, b) tal que ________.

2. La función $f(x) = |\text{sen } x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 1]$, pero no en el intervalo $[-1, 1]$ porque ________.

3. Si dos funciones F y G tienen la misma derivada en el intervalo (a, b), entonces existe una constante C tal que ________.

4. Como $D_x(x^4) = 4x^3$, se sigue que toda función F que satisface $F'(x) = 4x^3$ tiene la forma $F(x) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.6

En cada uno de los problemas del 1 al 21 se define una función y se da un intervalo cerrado. Decida si el teorema del valor medio se aplica a la función dada en el intervalo que se da. Si es así, encuentre todos los posibles valores de c; si no, establezca la razón. En cada problema bosqueje la gráfica de la función dada en el intervalo dado.

1. $f(x) = |x|; [1, 2]$ **2.** $g(x) = |x|; [-2, 2]$

3. $f(x) = x^2 + x; [-2, 2]$ **4.** $g(x) = (x + 1)^3; [-1, 1]$

5. $H(s) = s^2 + 3s - 1; [-3, 1]$

6. $F(x) = \frac{x^3}{3}; [-2, 2]$

7. $f(z) = \frac{1}{3}(z^3 + z - 4); [-1, 2]$

8. $F(t) = \frac{1}{t - 1}; [0, 2]$ **9.** $h(x) = \frac{x}{x - 3}; [0, 2]$

10. $f(x) = \frac{x - 4}{x - 3}; [0, 4]$ **11.** $h(t) = t^{2/3}; [0, 2]$

12. $h(t) = t^{2/3}; [-2, 2]$ **13.** $g(x) = x^{5/3}; [0, 1]$

14. $g(x) = x^{5/3}; [-1, 1]$ **15.** $S(\theta) = \operatorname{sen}\theta; [-\pi, \pi]$

16. $C(\theta) = \csc\theta; [-\pi, \pi]$ **17.** $T(\theta) = \tan\theta; [0, \pi]$

18. $f(x) = x + \frac{1}{x}; \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ **19.** $f(x) = x + \frac{1}{x}; [1, 2]$

20. $f(x) = [\![x]\!]; [1, 2]$ **21.** $f(x) = x + |x|; [-2, 1]$

22. **(Teorema de Rolle)** *Si f es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b) *y si* $f(a) = f(b)$*, entonces existe al menos un número c en (a, b), tal que* $f'(c) = 0$*.* Demuestre que el Teorema de Rolle, es sólo un caso especial del teorema del valor medio. [Michel Rolle (1652–1719) fue un matemático francés].

23. Para la función graficada en la figura 8 encuentre (de manera aproximada) todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.

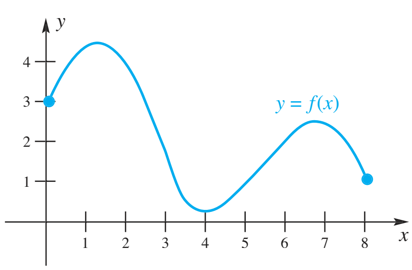


Figura 8

24. Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$, entonces el número c del teorema del valor medio siempre es el punto medio del intervalo dado $[a, b]$

25. Demuestre que si f es continua en (a, b) y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) > 0$, excepto en un punto x_0 en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). *Sugerencia:* considere f, por separado, en cada uno de los intervalos $(a, x_0]$ y $[x_0, b)$.

26. Utilice el problema 25 para demostrar que cada una de las siguientes funciones son crecientes en $(-\infty, \infty)$.

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^5$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

27. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t$ decrece en cualquier intervalo donde esté definida.

28. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t^2$ decrece en cualquier intervalo a la derecha del origen.

29. Demuestre que si $F'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = 0$ y aplique el teorema B.

30. Suponga que usted sabe que $\cos(0) = 1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $D_x\cos x = -\operatorname{sen} x$ y $D_x\operatorname{sen} x = \cos x$, pero no sabe nada más acerca de las funciones seno y coseno. Demuestre que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. *Sugerencia:* sea $F(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ y utilice el problema 29.

31. Demuestre que si $F'(x) = D$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = Dx + C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = Dx$ y aplique el teorema B.

32. Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre una fórmula para $F(x)$. *Sugerencia:* véase el problema 31.

33. Demuestre: sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y si $f'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución entre a y b. *Sugerencia:* use los teoremas del valor medio y de Rolle (véase el problema 22).

34. Demuestre que $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente una solución en cada uno de los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(4, 5)$. *Sugerencia:* aplique el problema 33.

35. Suponga que f tiene derivada en el intervalo I. Demuestre que entre distintos ceros sucesivos de f' sólo puede haber a lo más un cero de f. *Sugerencia:* trate de demostrar por contradicción y utilice el Teorema de Rolle (problema 22).

36. Sea g continua en $[a, b]$ y suponga que $g''(x)$ existe para toda x en (a, b). Demuestre que si existen tres valores de x en $[a, b]$ para los cuales $g(x) = 0$, entonces existe al menos un valor de x en (a, b) tal que $g''(x) = 0$.

37. Sea $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Utilizando el problema 36, demuestre que existe a lo más un valor en el intervalo $[0, 4]$ donde $f''(x) = 0$ y dos valores en el mismo intervalo donde $f'(x) = 0$.

38. Demuestre que si $|f'(x)| \leq M$ para toda x en (a, b) y si x_1 y x_2 son cualesquiera dos puntos en (a, b) entonces

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Nota: se dice que una función que satisface la desigualdad anterior satisface una *condición de Lipschitz* con constante M. [Rudolph Lipschitz (1832–1903) fue un matemático alemán].

39. Demuestre que $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ satisface una condición de Lipschitz con constante 2 en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase el problema 38.

40. Se dice que una función f es **no decreciente** en un intervalo I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I. De manera análoga, f es **no creciente** en I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I.

(a) Bosqueje la gráfica de una función no decreciente, pero no creciente.

(b) Haga la gráfica de una función no creciente, pero no decreciente.

41. Demuestre que si f es continua en I y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) \geq 0$ en el interior de I, entonces f es no decreciente en I. De manera análoga, si $f'(x) \leq 0$, entonces f es no creciente en I.

42. Demuestre que $f(x) \geq 0$ y $f'(x) \geq 0$ en I, entonces f^2 es no decreciente en I.

43. Demuestre que si $g'(x) \leq h'(x)$ para toda x en (a, b) entonces

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1)$$

para toda x_1 y x_2 en (a, b). *Sugerencia:* aplique el problema 41 con $f(x) = h(x) - g(x)$.

44. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x} \right) = 0$$

45. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$$

46. Suponga que, en una carrera, el caballo A y el caballo B inician en el mismo punto y terminan empatados. Demuestre que sus velocidades fueron idénticas en algún instante de la carrera.

47. En el problema 46, suponga que los dos caballos cruzaron la meta juntos a la misma velocidad. Demuestre que tuvieron la misma aceleración en algún instante.

48. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que la gráfica de una función cóncava hacia arriba, f, siempre está por arriba de su recta tangente; esto es, demuestre que

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c), \qquad x \neq c$$

49. Demuestre que si $|f(y) - f(x)| \leq M(y - x)^2$ para toda x y y, entonces f es una función constante.

50. Proporcione un ejemplo de una función f que sea continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y *no* derivable en $[0, 1]$ y que tenga una recta tangente en cada punto de $[0, 1]$.

51. John recorre 112 millas en 2 horas y asegura que nunca excedió la velocidad de 55 millas por hora. Utilice el teorema del valor medio para refutar la afirmación de John. *Sugerencia*: sea $f(t)$ la distancia recorrida en el tiempo t.

52. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Dieciocho minutos después, en un punto a 20 millas más adelante, cronometra 60 millas por hora. Bosqueje una gráfica posible de v contra t. Trace una posible gráfica de la distancia recorrida s contra t. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que el automóvil excedió la velocidad límite de 60 millas por hora en algún momento luego que dejó la caseta de peaje, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

53. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Veinte minutos después, en un punto a 20 millas de la caseta, dicho vehículo cronometró 60 millas por hora. Explique por qué el automóvil debe haber excedido 60 millas por hora en algún momento después de dejar la caseta, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

54. Demuestre que si la función de posición de un objeto está dada por $s(t) = at^2 + bt + c$, entonces la velocidad promedio en el intervalo $[A, B]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio de $[A, B]$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; (a, b); $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ **2.** $f'(0)$ no existe **3.** $F(x) = G(x) + C$ **4.** $x^4 + C$

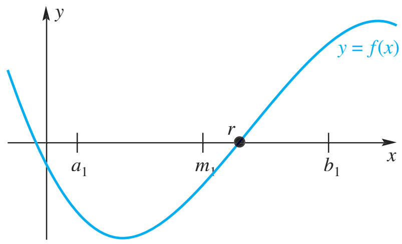
3.7 Solución numérica de ecuaciones

En matemáticas y ciencias, con frecuencia debemos hallar las raíces (o soluciones) de una ecuación $f(x) = 0$. Si $f(x)$ es un polinomio lineal o cuadrático, existen fórmulas bien conocidas para escribir las soluciones exactas. Pero para otras ecuaciones algebraicas y ciertamente para ecuaciones que incluyen funciones trascendentes, es raro contar con fórmulas para las soluciones exactas. En tales casos, ¿qué puede hacerse?

Existe un método general para resolver problemas, conocido por todas las personas ingeniosas. Dada una taza de té, agregamos azúcar un poco más cada vez hasta que sabe bien. Dado un tapón demasiado grande para un agujero, lo rebajamos hasta ajustarlo. Cambiamos la solución un poco cada vez, a fin de mejorar la precisión hasta que estamos satisfechos. A esto, los matemáticos le llaman *método de aproximaciones sucesivas* o *método de iteraciones*.

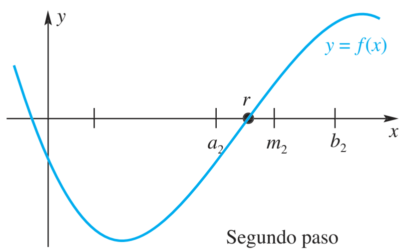
En esta sección presentamos tres de tales métodos para resolver ecuaciones: el de bisección, el de Newton y el de punto fijo. Los tres están diseñados para aproximar raíces reales de $f(x) = 0$ y requiere de muchos cálculos. Necesitará tener a la mano su calculadora.

El método de bisección En el ejemplo 7 de la sección 1.6 vimos cómo utilizar el teorema del valor intermedio para aproximar una solución de $f(x) = 0$, por medio de bisecar de manera sucesiva un intervalo que, se sabe, tiene una solución. Este método de bisección tiene dos grandes virtudes: simplicidad y confiabilidad. También tiene un vicio importante, la gran cantidad de pasos necesarios para alcanzar la precisión deseada (también conocido como lentitud de convergencia).



Primer paso

Figura 1



Segundo paso

Figura 2

Ponga en marcha el proceso y bosqueje la gráfica de f, que se supone es una función continua (véase la figura 1). Una raíz real de $f(x) = 0$ es un punto (técnicamente, la abscisa de un punto) en donde la gráfica cruza el eje x. Como primer paso para localizar este punto, ubique dos puntos, $a_1 < b_1$, en los que esté seguro de que f tiene signos opuestos; si f tiene signos opuestos en a_1 y b_1, entonces el producto $f(a_1) \cdot f(b_1)$ será negativo. (Trate de elegir a_1 y b_1 en lados opuestos de su mejor estimación de r). El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de una raíz entre a_1 y b_1. Ahora evalúe f en el punto medio $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ de $[a_1, b_1]$. El número m_1 es nuestra primera aproximación para r.

Entonces $f(m_1) = 0$, en cuyo caso hemos terminado, o $f(m_1)$ difiere en signo de $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Denote uno de los subintervalos $[a_1, m_1]$ o $[m_1, b_1]$ en el que cambia el signo por medio del símbolo $[a_2, b_2]$, y evalúe f en su punto medio $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ (véase la figura 2). El número m_2 es nuestra segunda aproximación a r.

Repita el proceso y determine de este modo una sucesión de aproximaciones m_1, $m_2, m_3,\ldots$, y subintervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3],\ldots$, de modo que cada subintervalo contenga a la raíz r y cada uno tenga la mitad de la longitud de su predecesor. Deténgase cuando r quede determinada en la precisión deseada; esto es, cuando $(b_n - a_n)/2$ sea menor que el error permitido, que denotaremos por E.

Algoritmo **Método de bisección**

Sea $f(x)$ una función continua, y sean a_1, b_1 números que satisfacen $a_1 < b_1$ y $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Suponga que E denota la cota deseada para el error $|r - m_n|$. Repita los pasos del 1 al 5 para $n = 1, 2,\ldots$ hasta que $h_n < E$:

1. Calcule $m_n = (a_n + b_n)/2$.
2. Calcule $f(m_n)$ y si $f(m_n) = 0$, entonces DETÉNGASE.
3. Calcule $h_n = (b_n - a_n)/2$
4. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) < 0$, entonces haga $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = m_n$.
5. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$, entonces haga $a_{n+1} = m_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

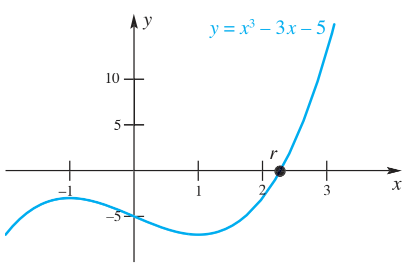


Figura 3

EJEMPLO 1 Determine la raíz real de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con una precisión de 0.0000001.

SOLUCIÓN Primero bosquejamos la gráfica de $y = x^3 - 3x - 5$ (figura 3) y, observando que cruza el eje x entre 2 y 3, comenzamos con $a_1 = 2$ y $b_1 = 3$.

Paso 1: $m_1 = (a_1 + b_1)/2 = (2 + 3)/2 = 2.5$

Paso 2: $f(m_1) = f(2.5) = 2.5^3 - 3 \cdot 2.5 - 5 = 3.125$

Paso 3: $h_1 = (b_1 - a_1)/2 = (3 - 2)/2 = 0.5$

Paso 4: Como

$$f(a_1) \cdot f(m_1) = f(2)f(2.5) = (-3)(3.125) = -9.375 < 0$$

hacemos $a_2 = a_1 = 2$ y $b_2 = m_1 = 2.5$.

Paso 5: La condición $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$ es falsa.

Ahora incrementamos n de modo que tenga el valor 2 y repetimos estos pasos. Podemos continuar este proceso para obtener las entradas de la siguiente tabla:

n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0.5	2.5	3.125
2	0.25	2.25	−0.359
3	0.125	2.375	1.271
4	0.0625	2.3125	0.429
5	0.03125	2.28125	0.02811
6	0.015625	2.265625	−0.16729
7	0.0078125	2.2734375	−0.07001
8	0.0039063	2.2773438	−0.02106
9	0.0019531	2.2792969	0.00350
10	0.0009766	2.2783203	−0.00878
11	0.0004883	2.2788086	−0.00264
12	0.0002441	2.2790528	0.00043
13	0.0001221	2.2789307	−0.00111
14	0.0000610	2.2789918	−0.00034
15	0.0000305	2.2790224	0.00005
16	0.0000153	2.2790071	−0.00015
17	0.0000076	2.2790148	−0.00005
18	0.0000038	2.2790187	−0.000001
19	0.0000019	2.2790207	0.000024
20	0.0000010	2.2790197	0.000011
21	0.0000005	2.2790192	0.000005
22	0.0000002	2.2790189	0.0000014
23	0.0000001	2.2790187	−0.0000011
24	0.0000001	2.2790188	0.0000001

Concluimos que $r = 2.2790188$ con un error de 0.0000001 cuando mucho. ■

El ejemplo 1 ilustra la desventaja del método de bisección. Las aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$, convergen muy lentamente a la raíz r. Pero convergen; esto es, $\lim_{n\to\infty} m_n = r$. El método funciona, y tenemos en el paso n una buena cota para el error $E_n = r - m_n$, a saber, $|E_n| \le h_n$.

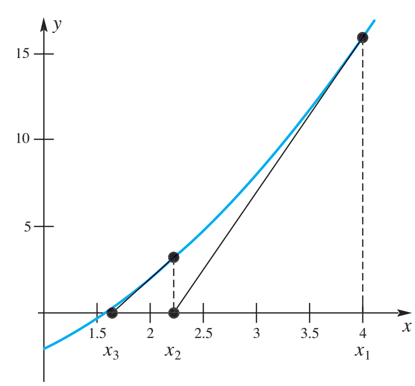


Figura 4

Método de Newton Sigamos considerando el problema de resolver la ecuación $f(x) = 0$ para una raíz r. Suponga que f es derivable, de modo que la gráfica de $y = f(x)$ tenga una recta tangente en cada punto. Si podemos encontrar una primera aproximación x_1 para r, ya sea a través de la gráfica o por cualquier otro medio (véase la figura 4), entonces una mejor aproximación x_2 tendría que estar en la intersección de la tangente en $(x_1, f(x_1))$ con el eje x. Entonces, utilizando x_2 como una aproximación, podemos determinar una mejor aproximación x_3, y así sucesivamente.

El proceso puede mecanizarse de modo que sea fácil hacerlo en una calculadora. La ecuación de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

y x_2, su intercepción con el eje x, se encuentra haciendo $y = 0$ y despejando a x. El resultado es

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Más en lo general, tenemos el algoritmo siguiente, también denominado *fórmula recursiva* o *esquema de iteración*.

Algoritmo **Método de Newton**

Sea $f(x)$ una función derivable y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $f(x)=0$. Sea E una cota para el error $|r-x_n|$.

Repita el paso siguiente para $n=1,2,\ldots,$ hasta que $|x_{n+1}-x_n|<E$:

1. $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real r de $f(x)=x^3-3x-5=0$ con siete decimales de precisión.

SOLUCIÓN Ésta es la misma ecuación que se consideró en el ejemplo 1. Utilicemos $x_1=2.5$ como la primera aproximación a r, como lo hicimos antes. Como $f(x)=x^3-3x-5$ y $f'(x)=3x^2-3$, el algoritmo es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$$

Obtenemos la siguiente tabla.

n	x_n
1	2.5
2	2.30
3	2.2793
4	2.2790188
5	2.2790188

Después de sólo cuatro pasos obtenemos una repetición de los primeros 8 dígitos. Sentimos confianza en reportar que $r\approx 2.2790188$, con quizá un poco de duda acerca del último dígito. ■

Algoritmos

Los algoritmos han formado parte de las matemáticas desde que las personas aprendieron a hacer las divisiones; pero son las ciencias de la computación las que han dado al pensamiento algorítmico su popularidad actual. ¿Qué es un algoritmo? Donald Knuth, decano de los científicos de la computación, responde:

"Un algoritmo es una secuencia de reglas definidas con precisión, que indican la forma de producir una información de salida específica a partir de una información de entrada dada, en un número finito de pasos".

¿Y qué son las ciencias de la computación? De acuerdo con Knuth:

"Son el estudio de los algoritmos".

EJEMPLO 3 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real positiva r de $f(x)=2-x+\operatorname{sen} x=0$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y=2-x+\operatorname{sen} x$ se muestra en la figura 5. Utilizaremos el valor inicial $x_1=2$. Como $f'(x)=-1+\cos x$, la iteración se convierte en

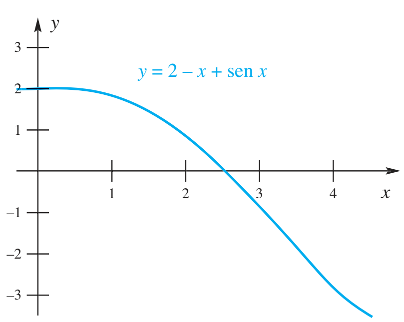


Figura 5

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 - x_n + \operatorname{sen} x_n}{-1 + \cos x_n}$$

que conduce a la siguiente tabla:

n	x_n
1	2.0
2	2.6420926
3	2.5552335
4	2.5541961
5	2.5541960
6	2.5541960

Al cabo de sólo cinco pasos, obtenemos una repetición de los siete decimales. Concluimos que $r\approx 2.5541960$. ■

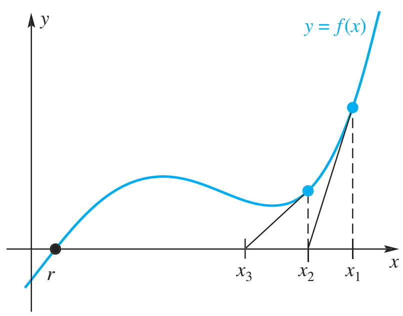


Figura 6

El método de Newton crea una *sucesión* aproximaciones sucesivas a la raíz. (En la sección 1.5 mencionamos brevemente las sucesiones). Con frecuencia, el método de Newton produce una sucesión $\{x_n\}$ que converge a la raíz de $f(x) = 0$, esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Sin embargo, éste no siempre es el caso. La figura 6 ilustra lo que puede ir mal (también véase el problema 22). Para la función de la figura 6, la dificultad es que x_1 no está lo suficientemente cerca de r como para iniciar un proceso convergente. Otras dificultades surgen si $f'(x)$ es cero o no está definida en o cerca de r. Cuando el método de Newton falla en producir aproximaciones que convergen a la solución, entonces usted puede reintentar dicho método con un punto inicial diferente o utilizar otro, como el método de bisección.

El algoritmo de punto fijo El algoritmo de punto fijo es sencillo y directo, pero con frecuencia funciona.

Suponga que una ecuación puede escribirse en la forma $x = g(x)$. Resolver esta ecuación es determinar un número r que no es alterado por la función g. A tal número lo denominamos un **punto fijo** de g. Para determinar este número, proponemos el siguiente algoritmo. Haga una primera estimación x_1. Luego haga $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, y así sucesivamente. Si tenemos suerte, x_n convergerá a la raíz r cuando $n \to \infty$.

Algoritmo **Algoritmo de punto fijo**

Sea $g(x)$ una función continua, y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $x = g(x)$. Denotemos con E una cota para el error $|r - x_n|$.

Repita el siguiente paso para $n = 1, 2, \ldots$, hasta que $|x_{n+1} - x_n| < E$.

1. $x_{n+1} = g(x_n)$

EJEMPLO 4 Utilice el algoritmo de punto fijo para aproximar la solución de $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos $x^2 = 2\sqrt{x+1}$, que conduce a $x = \pm\left(2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}$. Como sabemos que la solución es positiva, tomamos la raíz cuadrada positiva y escribimos la iteración como

$$x_{n+1} = \left(2\sqrt{x_n+1}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,(x_n+1)^{1/4}$$

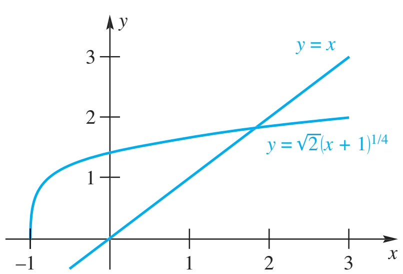


Figura 7

La figura 7 sugiere que el punto de intersección de las curvas $y = x$ y $y = \sqrt{2}\left(x+1\right)^{1/4}$ ocurre entre 1 y 2, quizá más cerca de 2, por lo que tomamos $x_1 = 2$ como nuestro punto de inicio. Esto lleva a la siguiente tabla. La solución es aproximadamente 1.8350867.

n	x_n	n	x_n
1	2.0	7	1.8350896
2	1.8612097	8	1.8350871
3	1.8392994	9	1.8350868
4	1.8357680	10	1.8350867
5	1.8351969	11	1.8350867
6	1.8351045	12	1.8350867

■

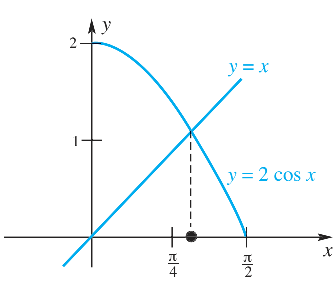


Figura 8

EJEMPLO 5 Resuelva $x = 2\cos x$ por medio del algoritmo de punto fijo.

SOLUCIÓN Primero observe que al resolver esta ecuación es equivalente a resolver el par de ecuaciones $y = x$ y $y = 2\cos x$. Así, para obtener nuestro valor inicial graficamos estas dos ecuaciones (véase la figura 8) y observe que las dos curvas se cortan en aproximadamente $x = 1$. Al tomar $x_1 = 1$ y aplicar el algoritmo $x_{n+1} = 2\cos x_n$, obtenemos el resultado en la siguiente tabla.

n	x_n	n	x_n
1	1	6	1.4394614
2	1.0806046	7	0.2619155
3	0.9415902	8	1.9317916
4	1.1770062	9	−0.7064109
5	0.7673820	10	1.5213931

Es claro que el proceso es inestable, aunque nuestra estimación inicial está muy cerca de la raíz real.

Intentemos con otro enfoque. Reescribimos la ecuación $x = 2 \cos x$ como $x = (x + 2 \cos x)/2$ y utilizamos el algoritmo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2 \cos x_n}{2}$$

Este proceso produce una sucesión convergente que se muestra en la siguiente tabla. (La oscilación en el último dígito se debe probablemente a errores de redondeo).

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1	7	1.0298054	13	1.0298665
2	1.0403023	8	1.0298883	14	1.0298666
3	1.0261107	9	1.0298588	15	1.0298665
4	1.0312046	10	1.0298693	16	1.0298666
5	1.0293881	11	1.0298655		
6	1.0300374	12	1.0298668		■

Ahora planteamos una pregunta obvia. ¿Por qué el segundo algoritmo condujo a una sucesión convergente, mientras que el primero no? Que funcione o no el algoritmo de punto fijo depende de dos factores. Uno es la formulación de la ecuación $x = g(x)$. El ejemplo 5 demuestra que una ecuación como $x = 2 \cos x$ puede reescribirse en una forma que da una sucesión diferente de aproximaciones. En el ejemplo 5, la reformulación fue $x = (x + 2 \cos x)/2$. En general, puede haber muchas formas de escribir la ecuación y el truco es encontrar una que funcione. Otro factor que afecta si el algoritmo de punto fijo converge es la cercanía del punto inicial x_1 a la raíz r. Como sugerimos para el método de Newton, si falla el algoritmo de punto fijo con un punto inicial, puede intentar con otro.

Revisión de conceptos

1. Las virtudes del método de bisección son su simplicidad y confiabilidad; su vicio es su _______.

2. Si f es continua en $[a, b]$, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay una _______ de $f(x) = 0$ entre a y b. Esto se deduce del teorema _______.

3. El método de bisección, el método de Newton y el algoritmo de punto fijo son ejemplos de _______; esto es, proporcionan una sucesión finita de pasos que, si se siguen, producirán una raíz de una ecuación con una precisión deseada.

4. Un punto x que satisface $g(x) = x$ se denomina un _______ de g.

Conjunto de problemas 3.7

$\boxed{C}$ *En los problemas del 1 al 4 utilice el método de bisección para aproximar la raíz real de la ecuación dada en el intervalo que se indica. Cada respuesta debe ser precisa a dos decimales.*

1. $x^3 + 2x - 6 = 0; [1, 2]$

2. $x^4 + 5x^3 + 1 = 0; [-1, 0]$

3. $2 \cos x - \operatorname{sen} x = 0; [1, 2]$

4. $x - 2 + 2 \cos x = 0; [1, 2]$

$\boxed{C}$ *En los problemas del 5 al 14 utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación que se da, con una precisión de cinco decimales. Comience por bosquejar una gráfica.*

5. La mayor raíz de $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$

6. La raíz real de $7x^3 + x - 5 = 0$

7. La raíz más grande de $x - 2 + 2 \cos x = 0$ (véase el problema 4)

8. La raíz positiva más pequeña de $2 \cos x - \text{sen } x = 0$ (véase el problema 3)

9. La raíz de $\cos x = 2x$

10. La raíz de $2x - \text{sen } x = 1$

11. Todas las raíces reales de $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 = 0$

12. Todas las raíces reales de $x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 24x - 8 = 0$

13. La raíz positiva de $2x^2 - \text{sen } x = 0$

14. La raíz positiva más pequeña de $2 \cot x = x$

C **15.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[3]{6}$ con cinco decimales de precisión. *Sugerencia*: resuelva $x^3 - 6 = 0$

C **16.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[4]{47}$ con cinco decimales de precisión.

GC *En los problemas del 17 al 20 aproxime los valores de x que proporcionan valores máximo y mínimo de la función en los intervalos que se indican.*

17. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x; [-1, 1]$

18. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 1}; [-4, 4]$

19. $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}; [\pi, 3\pi]$

20. $f(x) = x^2 \text{sen}\dfrac{x}{2}; [0, 4\pi]$

C **21.** La ecuación de Kepler $x = m + E \text{ sen } x$ es importante en astronomía. Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver esta ecuación para x cuando $m = 0.8$ y $E = 0.2$.

22. Bosqueje la gráfica de $y = x^{1/3}$. Es obvio que su única intercepción con el eje x es cero. Convénzase de que el método de Newton no converge. Explique por qué falla.

23. En las compras a plazos, a uno le gustaría encontrar la tasa real de interés (tasa efectiva), pero por desgracia esto incluye resolver una ecuación complicada. Si hoy uno compra un artículo cuyo valor es $\$P$ y acuerda pagarlo con pagos de $\$R$ al final de cada mes durante k meses, entonces

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^k}\right]$$

donde i es la tasa de interés mensual. Tom compró un automóvil usado por \$2000 y acordó pagarlo con abonos de \$100 al final de cada uno de los siguientes 24 meses.

(a) Demuestre que i satisface la ecuación

$$20i(1 + i)^{24} - (1 + i)^{24} + 1 = 0$$

(b) Demuestre que el método de Newton para esta ecuación se reduce a

$$i_{n+1} = i_n - \left[\frac{20i_n^2 + 19i_n - 1 + (1 + i_n)^{-23}}{500i_n - 4}\right]$$

C (c) Determine i, con una precisión de cinco decimales, iniciando con $i = 0.012$ y luego proporcione la tasa anual como un porcentaje ($r = 1200i$).

24. Al aplicar el método de Newton para resolver $f(x) = 0$, por lo común, uno puede decir si la sucesión converge simplemente al observar los números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Pero, incluso cuando converge, digamos en $\bar{x}$, ¿podemos estar seguros de que $\bar{x}$ es una solución? Demuestre que la respuesta es sí, siempre que f y f' sean continuas en $\bar{x}$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$.

C *En los problemas del 25 al 28 utilice el algoritmo de punto fijo con x_1, como se indica, para resolver las ecuaciones con cinco decimales de precisión.*

25. $x = \dfrac{3}{2}\cos x; x_1 = 1$

26. $x = 2 - \text{sen } x; x_1 = 2$

27. $x = \sqrt{2.7 + x}; x_1 = 1$

28. $x = \sqrt{3.2 + x}; x_1 = 47$

GC **29.** Considere la ecuación $x = 2(x - x^2) = g(x)$.

(a) Bosqueje la gráfica de $y = x$ y $y = g(x)$; utilice el mismo sistema de coordenadas y con ello ubique de manera aproximada la raíz positiva de $x = g(x)$.

(b) Intente resolver la ecuación por medio del algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0.7$.

(c) Resuelva la ecuación de forma algebraica.

GC **30.** Siga las instrucciones del problema 29 para $x = 5(x - x^2) = g(x)$.

C **31.** Considere $x = \sqrt{1 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = \sqrt{1 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$.

C **32.** Considere $x = \sqrt{5 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) De forma algebraica resuelva para x en $x = \sqrt{5 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \cdots}}}$.

C **33.** Considere $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 1$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(c) Evalúe la expresión siguiente. (Una expresión como ésta se denomina **fracción continua**).

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

EXPL **34.** Considere la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$ y suponga que $f'(x) \neq 0$ en un intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que si r está en $[a, b]$, entonces r es una raíz de la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$, si y sólo si $f(r) = 0$.

(b) Demuestre que el método de Newton es un caso especial del algoritmo de punto fijo, en el que $g'(r) = 0$.

35. Experimente con el algoritmo

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

utilizando diferentes valores de a.

(a) Establezca una conjetura acerca de lo que calcula este algoritmo.

(b) Pruebe su conjetura.

C *Después de derivar y hacer el resultado igual a cero, muchos problemas prácticos de máximos y mínimos conducen a una ecuación que no puede resolverse de manera exacta. Para los problemas siguientes, utilice un método numérico para aproximar la solución al problema.*

36. Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y los otros dos en la curva $y = \cos x$, con $-\pi/2 < x < \pi/2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima? (Véase la figura 24 de la sección 3.4).

37. Dos pasillos convergen en ángulo recto, como se muestra en la figura 6 de la sección 3.4, excepto que los anchos de los pasillos son de 8.6 y 6.2 pies. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

38. Un pasillo de 8 pies de ancho da vuelta como se muestra en la figura 9. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

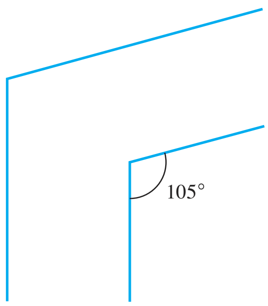


Figura 9

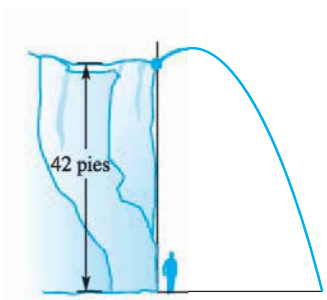


Figura 10

39. Un objeto lanzado desde el borde de un acantilado de 42 pies sigue una trayectoria dada por $y = -\frac{2x^2}{25} + x + 42$. (Véase la figura 10.) Un observador está parado a 3 pies de la base del acantilado.

(a) Determine la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Determine la posición del objeto cuando está más alejado del observador.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** lentitud de convergencia **2.** raíz: del valor intermedio **3.** algoritmos **4.** punto fijo

3.8 Antiderivadas

La mayoría de las operaciones matemáticas con que trabajamos vienen en pares de inversas: suma y resta, multiplicación y división, y exponenciación y extracción de raíces. En cada caso, la segunda operación deshace la primera y viceversa. Una razón para nuestro interés en las operaciones inversas es su utilidad en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, la resolución de $x^3 = 8$ implica el uso de extraer raíces. En este capítulo y en el anterior hemos estudiado derivación. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas necesitaremos su inversa, denominada *antiderivación* o *integración*.

Definición

Llamamos a F una **antiderivada** de f en el intervalo I si $D_xF(x) = f(x)$ en I; esto es, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

En nuestra definición utilizamos *una* antiderivada, en lugar de *la* antiderivada. Pronto verá por qué.

EJEMPLO 1 Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = 4x^3$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Buscamos una función F que satisfaga $F'(x) = 4x^3$ para toda x real. De nuestra experiencia con derivación, sabemos que $F(x) = x^4$ es una de tales funciones. ■

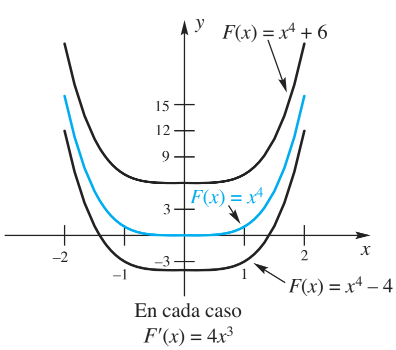


Figura 1

Un momento de reflexión sugerirá otras soluciones para el ejemplo 1. La función $F(x) = x^4 + 6$ también satisface $F'(x) = 4x^3$; también es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$. De hecho, $F(x) = x^4 + C$, donde C es cualquier constante, es una antiderivada de $4x^3$ en $(-\infty, \infty)$ (véase la figura 1).

Ahora planteamos una pregunta importante. ¿Toda derivada de $f(x) = 4x^3$ es de la forma $F(x) = x^4 + C$? La respuesta es sí. Esto se deduce del teorema 3.6B, el cual establece que si dos funciones tienen la misma derivada, deben diferir en una constante.

Ésta es nuestra conclusión: si una función f tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la suma de una constante adecuada. A esta familia de funciones le llamamos la **antiderivada general** de f. Después de acostumbrarnos a esta noción, con frecuencia omitiremos el adjetivo *general*.

EJEMPLO 2 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función $F(x) = x^3$ no funcionará porque su derivada es $3x^2$. Pero esto sugiere $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, la cual satisface $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Sin embargo, la antiderivada general es $\frac{1}{3}x^3 + C$. ■

Notación para las antiderivadas Como utilizamos el símbolo D_x para la operación de tomar la derivada, sería natural utilizar A_x para la operación de encontrar la antiderivada. Así,

$$A_x(x^2) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Ésta es la notación empleada por varios autores y, de hecho, fue usada en ediciones anteriores de este texto. No obstante, la notación original de Leibniz continúa gozando de una popularidad aplastante y, por lo tanto, decidimos seguirla. En lugar de A_x, Leibniz utilizó el símbolo $\int \ldots dx$. Él escribió

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

y

$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C$$

Leibniz eligió utilizar la s alargada, $\int$, y la dx por razones que no serán evidentes sino hasta el capítulo siguiente. Por el momento, basta con considerar a $\int \ldots dx$ como indicación de la antiderivada con respecto a x, al igual que D_x indica la derivada con respecto a x. Observe que

$$D_x \int f(x)\, dx = f(x) \quad \text{y} \quad \int D_x f(x)\, dx = f(x) + C$$

Teorema A Regla para la potencia

Si r es cualquier número racional, excepto -1, entonces

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Demostración de reglas para antiderivadas

Para establecer cualquier resultado de la forma

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

todo lo que tenemos que hacer es demostrar que

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Demostración La derivada del lado derecho es

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r$$ ■

Hacemos dos comentarios con relación al teorema A. Primero, el teorema incluye al caso $r = 0$; es decir,

$$\boxed{\int 1\, dx = x + C}$$

Segundo, puesto que no se especificó ningún intervalo, la conclusión se entiende que será válida sólo en intervalos en los que x^r esté definida. En particular, debemos excluir cualquier intervalo que contenga al origen si $r < 0$.

Siguiendo a Leibniz, a veces usaremos el término **integral indefinida** en lugar de antiderivada. Antiderivar también es **integrar.** En el símbolo $\int f(x)\,dx$, $\int$ se denomina **signo de integral** y $f(x)$ se llama **integrando**. Así, integramos el integrando y de este modo evaluamos la integral indefinida. Tal vez Leibniz utilizó el adjetivo *indefinida* para sugerir que la integral indefinida siempre incluye una constante arbitraria.

EJEMPLO 3 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^{4/3}$.

SOLUCIÓN

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = \tfrac{3}{7}x^{7/3} + C \qquad \blacksquare$$

Observe que *para integrar una potencia de x aumentamos el exponente en 1 y dividimos entre el nuevo exponente*.

Las fórmulas de antiderivadas para las funciones seno y coseno se deducen directamente de la derivada.

Teorema B

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \quad \text{y} \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

Demostración Simplemente observe que $D_x(-\cos x + C) = \operatorname{sen} x$ y $D_x(\operatorname{sen} x + C) = \cos x$. ■

La integral indefinida es lineal Recuerde del capítulo 2 que D_x es un operador lineal. Esto significa dos cosas.

1. $D_x[kf(x)] = kD_xf(x)$
2. $D_x[f(x) + g(x)] = D_xf(x) + D_xg(x)$

De estas dos propiedades se deduce una tercera, de manera automática.

3. $D_x[f(x) - g(x)] = D_xf(x) - D_xg(x)$

Resulta que $\int \ldots dx$ también tiene estas propiedades de un operador lineal.

Teorema C La integral indefinida es un operador lineal

Suponga que f y g tienen antiderivadas (integrales indefinidas) y sea k una constante. Entonces:

(i) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx;$

(ii) $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx;$

(iii) $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$

Demostración Para demostrar (i) y (ii) basta con derivar el lado derecho y observar que obtenemos el integrando del lado izquierdo.

$$D_x\left[k\int f(x)\,dx\right] = kD_x\int f(x)\,dx = kf(x)$$

$$\begin{aligned} D_x\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] &= D_x\int f(x)\,dx + D_x\int g(x)\,dx \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

La propiedad (iii) se deduce de (i) y (ii). ■

EJEMPLO 4 Mediante la linealidad de $\int$, evalúe

(a) $\int (3x^2 + 4x)\,dx$ (b) $\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du$ (c) $\int \left(1/t^2 + \sqrt{t}\right) dt$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4x)\,dx &= \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx \\ &= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \\ &= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2) \\ &= x^3 + 2x^2 + C\end{aligned}$$

Aparecieron dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, pero se combinaron en una constante, C, una práctica que seguiremos de manera consistente.

(b) Observe el uso de la variable u en lugar de x. Esto está bien mientras que el correspondiente símbolo de la diferencial sea *du;* entonces, tenemos un cambio completo en la notación

$$\begin{aligned}\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du &= \int u^{3/2}\,du - 3\int u\,du + 14\int 1\,du \\ &= \tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{3}{2}u^2 + 14u + C\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt &= \int (t^{-2} + t^{1/2})\,dt = \int t^{-2}\,dt + \int t^{1/2}\,dt \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C\end{aligned}$$

■

Regla generalizada de la potencia Recuérdese la regla de la cadena como se aplicó a una potencia de una función. Si $u = g(x)$ es una función derivable y r es un número racional ($r \neq -1$), entonces

$$D_x\left[\frac{u^{r+1}}{r+1}\right] = u^r \cdot D_x u$$

o, en notación de funciones,

$$D_x\left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right) = [g(x)]^r \cdot g'(x)$$

De esto obtenemos una regla importante para integrales indefinidas.

Teorema D Regla generalizada de la potencia

Sean g una función derivable y r un número racional diferente de -1. Entonces

$$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Para aplicar el teorema D, debemos ser capaces de reconocer las funciones g y g' en el integrando.

EJEMPLO 5 Evalúe

(a) $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx$ (b) $\int \operatorname{sen}^{10} x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $g(x) = x^4 + 3x$; entonces $g'(x) = 4x^3 + 3$. Así, por el teorema D

$$\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx = \int [g(x)]^{30} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C$$
$$= \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + C$$

(b) Sea $g(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $g'(x) = \cos x$. Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^{10} x \cos x\,dx = \int [g(x)]^{10} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C$$

El ejemplo 5 muestra por qué Leibniz usó la diferencial dx en su notación $\int \ldots dx$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Por consiguiente, la conclusión del teorema D es

$$\int u^r\,du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, \qquad r \neq -1$$

que es la regla común para la potencia con u como variable. Así, la regla generalizada para la potencia es sólo la regla común para la potencia aplicada a funciones. Pero, al aplicarla, siempre debemos estar seguros de que tenemos du para ir con u^r. Los siguientes ejemplos ilustran lo que queremos decir.

EJEMPLO 6 Evalúe

(a) $\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx$ (b) $\int (x^2 + 4)^{10} x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $u = x^3 + 6x$; entonces $du = (3x^2 + 6)dx$. Así, $(6x^2 + 12)dx = 2(3x^2 + 6)dx = 2du$, y en consecuencia

$$\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx = \int u^5\, 2\,du$$
$$= 2\int u^5\,du$$
$$= 2\left[\frac{u^6}{6} + C\right]$$
$$= \frac{u^6}{3} + 2C$$
$$= \frac{(x^3 + 6x)^6}{3} + K$$

Deben notarse dos cosas con respecto a nuestra solución. Primero, el hecho de que $(6x^2 + 12)dx$ es $2du$ en lugar de du no causa problema; por la linealidad de la integral, el factor 2 pudo colocarse al frente del signo de la integral. Segundo, terminamos con una constante arbitraria $2C$. También ésta es una constante arbitraria; llamémosle K.

(b) Sea $u = x^2 + 4$; entonces $du = 2xdx$. Así,

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 4)^{10} x\, dx &= \int (x^2 + 4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int u^{10}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} + C\right) \\ &= \frac{(x^2 + 4)^{11}}{22} + K\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. La regla de la potencia para derivadas dice que $d(x^r)/dx =$ ________. La regla de la potencia para integrales dice que $\int x^r\, dx =$ ______.

2. La regla generalizada de la potencia para derivadas dice que $d[f(x)]^r/dx =$ ________. La regla generalizada de la potencia para integrales dice que $\int$ _____ $dx = [f(x)]^{r+1}/(r + 1) + C, r \neq -1$.

3. $\int (x^4 + 3x^2 + 1)^8(4x^3 + 6x)\, dx =$ _____.

4. Con base en la linealidad, $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx =$ _____.

Conjunto de problemas 3.8

Encuentre la antiderivada general F(x) + C para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 5$

2. $f(x) = x - 4$

3. $f(x) = x^2 + \pi$

4. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$

5. $f(x) = x^{5/4}$

6. $f(x) = 3x^{2/3}$

7. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = 7x^{-3/4}$

9. $f(x) = x^2 - x$

10. $f(x) = 3x^2 - \pi x$

11. $f(x) = 4x^5 - x^3$

12. $f(x) = x^{100} + x^{99}$

13. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}x$

14. $f(x) = x^2\left(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} + \dfrac{3}{x^5}$

17. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

18. $f(x) = \dfrac{x^6 - x}{x^3}$

En los problemas del 19 al 26 evalúe las integrales indefinidas que se indican.

19. $\int (x^2 + x)\, dx$

20. $\int \left(x^3 + \sqrt{x}\right) dx$

21. $\int (x + 1)^2\, dx$

22. $\int \left(z + \sqrt{2}z\right)^2 dz$

23. $\int \dfrac{(z^2 + 1)^2}{\sqrt{z}}\, dz$

24. $\int \dfrac{s(s + 1)^2}{\sqrt{s}}\, ds$

25. $\int (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\, d\theta$

26. $\int (t^2 - 2\cos t)\, dt$

En los problemas del 27 al 36 utilice los métodos de los ejemplos 5 y 6 para evaluar las integrales indefinidas.

27. $\int \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3 \sqrt{2}\, dx$

28. $\int (\pi x^3 + 1)^4\, 3\pi x^2\, dx$

29. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6\, dx$

30. $\int (5x^2 + 1)\sqrt{5x^3 + 3x - 2}\, dx$

31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2 - 11}\, dt$

32. $\int \dfrac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}}\, dy$

33. $\int x^2\sqrt{x^3 + 4}\, dx$

34. $\int (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}\, dx$

35. $\int \operatorname{sen} x\, (1 + \cos x)^4\, dx$

36. $\int \operatorname{sen} x \cos x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

En los problemas del 37 al 42 se da $f''(x)$. Encuentre $f(x)$ antiderivando dos veces. Observe que en este caso su respuesta debe incluir dos constantes arbitrarias, una proveniente de cada antiderivación. Por ejemplo, si $f''(x) = x$, entonces $f'(x) = x^2/2 + C_1$ y $f(x) = x^3/6 + C_1x + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 no pueden combinarse porque C_1x no es una constante.

37. $f''(x) = 3x + 1$

38. $f''(x) = -2x + 3$

39. $f''(x) = \sqrt{x}$

40. $f''(x) = x^{4/3}$

41. $f''(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$

42. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

43. Demuestre la fórmula

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$$

Sugerencia: véase el recuadro al margen junto al teorema A.

44. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

45. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x-1}} + 2x\sqrt{x-1}\right] dx$$

46. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{-x^3}{(2x+5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x+5}}\right] dx$$

47. Encuentre $\int f''(x)\, dx$ si $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$.

48. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{3/2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

49. Demuestre la fórmula

$$\int f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)[nf(x)g'(x) + mg(x)f'(x)]\, dx = f^m(x)g^n(x) + C$$

50. Evalúe la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^3[(x^2+1)^4]\cos[(x^2+1)^4](x^2+1)^3 x\, dx$$

Sugerencia: sea $u = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^4$.

51. Evalúe $\int |x|\, dx$.

52. Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

CAS **53.** Algunos paquetes de software pueden evaluar integrales indefinidas. Utilice su software en cada una de las siguientes integrales.

(a) $\int 6\operatorname{sen}(3(x-2))\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^3(x/6)\, dx$

(c) $\int (x^2\cos 2x + x\operatorname{sen} 2x)\, dx$

EXPL CAS **54.** Sea $F_0(x) = x\operatorname{sen} x$ y $F_{n+1}(x) = \int F_n(x)\, dx$.

(a) Determine $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, y $F_4(x)$.

(b) Con base en la parte (a) realice una conjetura sobre la forma de $F_{16}(x)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** rx^{r-1}; $x^{r+1}/(r+1) + C, r \neq -1$ **2.** $r[f(x)]^{r-1}f'(x)$; $[f(x)]^r f'(x)$ **3.** $(x^4 + 3x^2 + 1)^9/9 + C$ **4.** $c_1\int f(x)\, dx + c_2\int g(x)\, dx$

3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales

En la sección precedente, nuestra tarea fue antiderivar (integrar) una función f para obtener una nueva función F. Escribimos

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C}$$

y, por definición, esto fue correcto siempre y cuando $F'(x) = f(x)$. Ahora $F'(x) = f(x)$ en el lenguaje de derivadas es equivalente a $dF(x) = f(x)dx$ en el lenguaje de diferenciales (véase la sección 2.9). Por lo tanto, podemos interpretar la fórmula del recuadro como

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}$$

Desde esta perspectiva, integramos la diferencial de una función para obtener la función (más una constante). Éste fue el punto de vista de Leibniz; adoptarlo nos ayudará a resolver *ecuaciones diferenciales*.

¿Qué es una ecuación diferencial? Para motivar nuestra respuesta, empezamos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación, en x y y, de la curva que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.

SOLUCIÓN La condición que debe cumplirse en cada punto (x, y) de la curva es

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Estamos buscando una función $y = f(x)$ que satisfaga esta ecuación y con la condición adicional de que $y = 2$ cuando $x = -1$. Sugerimos dos formas de ver este problema.

Método 1 Cuando una ecuación tiene la forma $dy/dx = g(x)$ observamos que y debe ser una antiderivada de $g(x)$; esto es,

$$y = \int g(x)\, dx$$

En nuestro caso,

$$y = \int 2x\, dx = x^2 + C$$

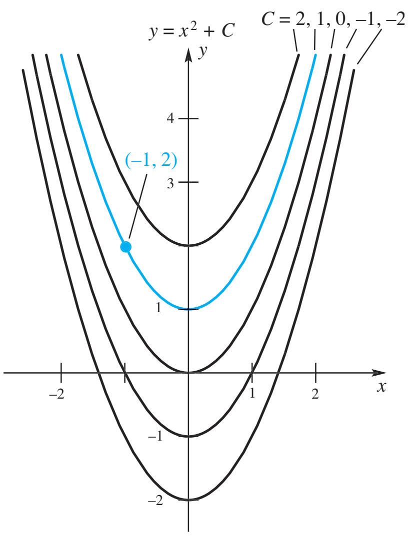


Figura 1

Método 2 Considere a dy/dx como un cociente de dos diferenciales. Cuando multiplicamos ambos lados de $dy/dx = 2x$ por dx, obtenemos

$$dy = 2x\, dx$$

Ahora, integramos las diferenciales de ambos lados, igualamos los resultados y simplificamos

$$\int dy = \int 2x\, dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

$$y = x^2 + C_2 - C_1$$

$$y = x^2 + C$$

El segundo método funciona en una gran variedad de problemas que no están en la forma sencilla $dy/dx = g(x)$, como veremos.

La solución $y = x^2 + C$ representa la familia de curvas ilustrada en la figura 1. De esta familia debemos seleccionar la curva para la que $y = 2$ cuando $x = -1$; por lo tanto, queremos que

$$2 = (-1)^2 + C$$

Concluimos que $C = 1$ y, por lo tanto, que $y = x^2 + 1$. ■

Las ecuaciones $dy/dx = 2x$ y $dy = 2x\, dx$ se denominan *ecuaciones diferenciales*. Otros ejemplos son

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + \operatorname{sen} x$$

$$y\, dy = (x^3 + 1)\, dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Cualquier ecuación en la que la incógnita sea una función y que incluya derivadas (o diferenciales) de esta función desconocida se denomina **ecuación diferencial**. Una función que cuando se sustituye en la ecuación diferencial da una igualdad, se llama una **solución** de la ecuación diferencial. Por lo tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una *función* desconocida. En general, ésta es una tarea difícil y sobre la que se han escrito muchos y extensos libros. Aquí sólo consideraremos el tipo más sencillo, las ecuaciones diferenciales **de primer orden con variables separables**. Éstas son ecuaciones que incluyen sólo a la primera derivada de la función desconocida y son tales que las variables pueden separarse, una en cada lado de la ecuación.

Separación de variables Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por $y^2 dx$, obtenemos

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

En esta forma, la ecuación diferencial tiene separadas sus variables; es decir, los términos que incluyen a y están en un lado de la ecuación y los de x en el otro. De manera separada, podemos resolver la ecuación diferencial utilizando el método 2 (integrar ambos lados, igualar los resultados y simplificar), como lo ilustramos ahora.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Después encuentre aquella solución para la cual $y = 6$ cuando $x = 0$.

SOLUCIÓN Como se observó anteriormente, la ecuación dada es equivalente a

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

Así,

$$\begin{aligned} \int y^2\,dy &= \int (x + 3x^2)\,dx \\ \frac{y^3}{3} + C_1 &= \frac{x^2}{2} + x^3 + C_2 \\ y^3 &= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + (3C_2 - 3C_1) \\ &= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C \\ y &= \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C} \end{aligned}$$

Para encontrar la constante C utilizamos la condición $y = 6$ cuando $x = 0$. Esto da

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt[3]{C} \\ 216 &= C \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}$$

Para verificar nuestro trabajo podemos sustituir este resultado en ambos lados de la ecuación diferencial original para ver que dé una igualdad. También debemos confirmar que $y = 6$ cuando $x = 0$.

Al sustituir en el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{-2/3}(3x + 9x^2) \\ &= \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}} \end{aligned}$$

En el lado derecho obtenemos

$$\frac{x + 3x^2}{y^2} = \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

Como se esperaba, las dos expresiones son iguales. Cuando $x = 0$ tenemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0^2}{2} + 3 \cdot 0^3 + 216} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Así, $y = 6$ cuando $x = 0$, como esperábamos. ■

Problemas sobre movimiento Recuerde que si $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente, en el instante t de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado, entonces

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En algún trabajo previo (véase la sección 2.6) supusimos que $s(t)$ era conocida, y a partir de esto calculamos $v(t)$ y $a(t)$. Ahora queremos considerar el proceso inverso; dada la aceleración $a(t)$, encontrar la velocidad $v(t)$ y la posición $s(t)$.

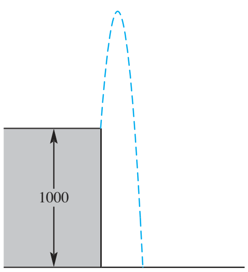


Figura 2

EJEMPLO 3 **Problema de un cuerpo que cae**

Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debido a la gravedad, es de 32 pies por segundo por segundo, siempre y cuando la resistencia al aire se pueda despreciar. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies (véase la figura 2) a una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y altura 4 segundos después.

SOLUCIÓN Supongamos que la altura s se considera positiva hacia arriba. Entonces $v = ds/dt$ inicialmente es positiva (s está aumentando), pero $a = dv/dt$ es negativa. (La fuerza debida a la gravedad es descendente, por lo que v disminuye.) De aquí que iniciamos nuestro análisis con la ecuación diferencial $dv/dt = -32$, con las condiciones adicionales de que $v = 50$ y $s = 1000$ cuando $t = 0$. El método 1 (antiderivación directa) y el método 2 (separación de variables) funcionan bien.

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

$$v = \int -32\, dt = -32t + C$$

Como $v = 50$ en $t = 0$, encontramos que $C = 50$, y así

$$\boxed{v = -32t + 50}$$

Ahora, $v = ds/dt$, por lo que tenemos otra ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 50$$

Cuando integramos obtenemos

$$s = \int (-32t + 50)\, dt$$
$$= -16t^2 + 50t + K$$

Ya que $s = 1000$ en $t = 0$, $K = 1000$ y

$$\boxed{s = -16t^2 + 50t + 1000}$$

Por último, en $t = 4$,

$$v = -32(4) + 50 = -78 \text{ pies por segundo}$$
$$s = -16(4)^2 + 50(4) + 1000 = 944 \text{ pies}$$ ■

Hacemos notar que si $v = v_0$ y $s = s_0$ en $t = 0$, el procedimiento del ejemplo 3 lleva a las conocidas fórmulas de caída de un cuerpo.

$$\begin{aligned} a &= -32 \\ v &= -32t + v_0 \\ s &= -16t^2 + v_0 t + s_0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t + 3)^{-3}$ en metros por segundo por segundo. Si la velocidad en $t = 0$ es 4 metros por segundo, encuentre la velocidad 2 segundos más tarde.

SOLUCIÓN Empezamos con la ecuación diferencial de la primera línea, de las ecuaciones que se muestran a continuación. Para realizar la integración en la segunda línea, multiplicamos y dividimos entre 2, así preparamos la integral para la regla generalizada para la potencia.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (2t + 3)^{-3} \\ v &= \int (2t + 3)^{-3}\,dt = \frac{1}{2}\int (2t + 3)^{-3}\,2\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2t + 3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + C \end{aligned}$$

Como $v = 4$ en $t = 0$,

$$4 = -\frac{1}{4(3)^2} + C$$

que da $C = \frac{145}{36}$. Así,

$$v = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + \frac{145}{36}$$

En $t = 2$,

$$v = -\frac{1}{4(49)} + \frac{145}{36} \approx 4.023 \text{ metros por segundo}$$

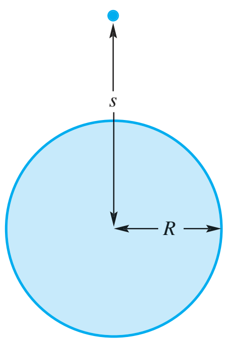
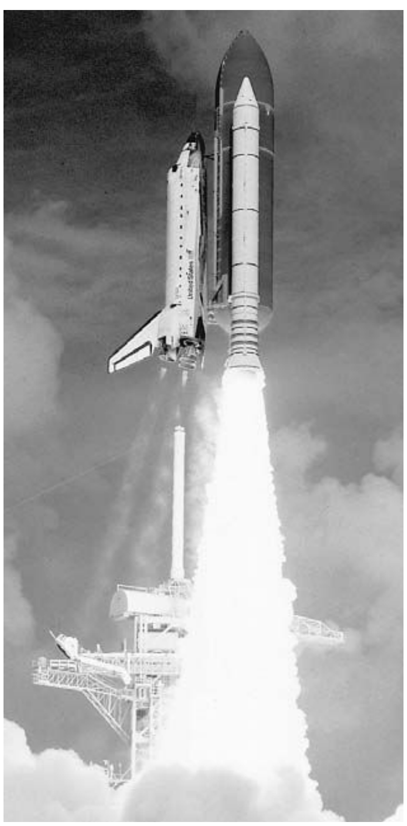


Figura 3



EJEMPLO 5 **Velocidad de escape (opcional)**

La atracción gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un objeto de masa m a una distancia s del centro de la Tierra está dado por $F = -mgR^2/s^2$, donde $-g$ ($g \approx 32$ pies por segundo por segundo) es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra y R ($R \approx 3960$ millas) es el radio de la Tierra (véase la figura 3). Demuestre que un objeto lanzado hacia arriba desde la Tierra, con una velocidad inicial $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 6.93$ millas por segundo no regresará a la Tierra. En estos cálculos no tome en cuenta la resistencia del aire.

SOLUCIÓN De acuerdo con la segunda Ley de Newton, $F = ma$; es decir,

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

Así,

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{R^2}{s^2}$$

Al separar variables se obtiene

$$\begin{aligned} v\,dv &= -gR^2 s^{-2}\,ds \\ \int v\,dv &= -gR^2 \int s^{-2}\,ds \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{gR^2}{s} + C \end{aligned}$$

Ahora $v = v_0$ cuando $s = R$, y de este modo $C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$. En consecuencia,

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

Por último, ya que $2gR^2/s$ se reduce conforme s aumenta, vemos que v permanece positiva si y sólo si $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. ■

Revisión de conceptos

1. $dy/dx = 3x^2 + 1$ y $dy/dx = x/y^2$ son ejemplos de lo que se llama una ________.

2. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = g(x, y)$ hay que encontrar la ________ que, cuando se sustituya por y proporcione una igualdad.

3. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = x^2y^3$, el primer paso sería ________.

4. Para resolver el problema de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, iniciamos con el hecho experimental de que la aceleración debida a la gravedad es de −32 pies por segundo por segundo; es decir, $a = dv/dt = -32$. Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene $v = ds/dt =$ ________, y al resolver la ecuación diferencial resultante se obtiene $s =$ ________.

Conjunto de problemas 3.9

En los problemas del 1 al 4 demuestre que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial que se da; es decir, sustituya la función que se indica por y para ver que produzca una igualdad.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{y} = 0;\ y = \sqrt{1 - x^2}$

2. $-x\dfrac{dy}{dx} + y = 0;\ y = Cx$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\ y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

4. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1;\ y = \operatorname{sen}(x + C)$ y $y = \pm 1$

En los problemas del 5 al 14 encuentre primero la solución general (que incluya una constante C) para la ecuación diferencial dada. Después encuentre la solución particular que satisfaga la condición que se indica. (Véase el ejemplo 2.)

5. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 1;\ y = 1$ en $x = 1$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x^{-3} + 2;\ y = 3$ en $x = 1$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y};\ y = 1$ en $x = 1$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x}{y}};\ y = 4$ en $x = 1$

9. $\dfrac{dz}{dt} = t^2z^2;\ z = 1/3$ en $t = 1$

10. $\dfrac{dy}{dt} = y^4;\ y = 1$ en $t = 0$

11. $\dfrac{ds}{dt} = 16t^2 + 4t - 1;\ s = 100$ en $t = 0$

12. $\dfrac{du}{dt} = u^3(t^3 - t);\ u = 4$ en $t = 0$

13. $\dfrac{dy}{dx} = (2x + 1)^4;\ y = 6$ at $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx} = -y^2x(x^2 + 2)^4;\ y = 1$ at $x = 0$

15. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es tres veces su abscisa (véase el ejemplo 1).

16. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es el triple del cuadrado de su ordenada (coordenada y).

En los problemas del 17 al 20, un objeto se mueve a lo largo de una recta, sujeto a la aceleración a (en centímetros por segundo por segundo), que se indica, con la velocidad inicial v_0 (en centímetros por segundo) y la distancia dirigida s_0 (en centímetros). Encuentre la velocidad v y la distancia dirigida s después de 2 segundos (véase el ejemplo 4).

17. $a = t;\ v_0 = 3,\ s_0 = 0$

18. $a = (1 + t)^{-4};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

C **19.** $a = \sqrt[3]{2t + 1};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

C **20.** $a = (3t + 1)^{-3};\ v_0 = 4,\ s_0 = 0$

21. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? (Véase el ejemplo 3.)

22. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de un planeta en donde la aceleración debida a la gravedad es k (una constante negativa) pies por segundo por segundo. Si la velocidad inicial es v_0, demuestre que la altura máxima es $-v_0^2/2k$.

C **23.** En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es −5.28 pies por segundo por segundo. Si un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, a una velocidad de 56 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4.5 segundos más tarde.

C **24.** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto del problema 23?

25. La tasa de cambio del volumen V de una bola de nieve que se derrite es proporcional al área de su superficie S; es decir, $dV/dt = -kS$, donde k es una constante positiva. Si el radio de la bola en $t = 0$ es $r = 2$, y en $t = 10$ es $r = 0.5$, demuestre que $r = -\frac{3}{20}t + 2$.

26. ¿Desde qué altura, por arriba de la Tierra, debe dejarse caer una pelota para que llegue al suelo a una velocidad de -136 pies por segundo?

C **27.** Determine la *velocidad de escape* para un objeto lanzado desde cada uno de los siguientes cuerpos celestes (véase el ejemplo 5). Aquí, $g \approx 32$ pies por segundo por segundo.

	Aceleración debida a la gravedad	Radio (millas)
Luna	$-0.165g$	1,080
Venus	$-0.85g$	3,800
Júpiter	$-2.6g$	43,000
Sol	$-28g$	432,000

28. Si los frenos de un automóvil, cuando se aplican por completo, producen una desaceleración constante de 11 pies por segundo por segundo, ¿cuál es la distancia más corta en la que pueden aplicarse los frenos hasta detenerse, cuando lleva una velocidad de 60 millas por hora?

29. ¿Qué aceleración constante causará que un automóvil aumente su velocidad de 45 a 60 millas por hora en 10 segundos?

30. Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado con una aceleración de 8 pies por segundo por segundo. Si el plano inclinado tiene una longitud de 75 pies y el bloque llega a la parte baja en 3.75 segundos, ¿cuál fue la velocidad inicial del bloque?

31. Cierto cohete, inicialmente en reposo, que es disparado directamente hacia arriba tiene una aceleración de $6t$ metros por segundo por segundo durante los primeros 10 segundos después del despegue, a partir de los cuales el motor se detiene y el cohete sólo está sujeto a la aceleración debida a la gravedad de -10 metros por segundo por segundo. ¿A qué altura llegará el cohete?

32. Al ponerse en marcha en la estación A, un tren acelera a 3 metros por segundo por segundo durante 8 segundos, después viaja a velocidad constante v_m durante 100 segundos, y finalmente frena (desacelera) a 4 metros por segundo por segundo, para hacer una parada en la estación B. Encuentre (a) v_m y (b) la distancia entre A y B.

33. A partir del reposo, un autobús aumenta su velocidad con una aceleración constante a_1, después viaja a velocidad constante v_m, y finalmente frena para detenerse a una aceleración constante a_2 ($a_2 < 0$). Le toma 4 minutos recorrer las 2 millas entre las paradas C y D, y luego 3 minutos para recorrer 1.4 millas entre las paradas D y E.

(a) Bosqueje la gráfica de la velocidad v como una función del tiempo t, $0 \le t \le 7$.

(b) Encuentre la velocidad máxima v_m.

(c) Si $a_1 = -a_2 = a$, evalúe a.

34. Un globo de aire caliente abandona el piso elevándose a 4 pies por segundo. Dieciséis segundos después, Victoria arroja una pelota directamente hacia arriba a su amigo Colleen, que está en el globo. ¿A qué velocidad lanzó la pelota si llegó a Colleen?

35. De acuerdo con la Ley de Torricelli, la razón de cambio del volumen, V, de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua. Un tanque cilíndrico de radio $10/\sqrt{\pi}$ centímetros y 16 centímetros de altura, inicialmente lleno, tarda 40 segundos en vaciarse.

(a) Escriba una ecuación diferencial para V en el instante t y las condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Encuentre el volumen del agua después de 10 segundos.

C **36.** En cierto estado, la población de lobos P ha crecido a una tasa proporcional a la raíz cúbica del tamaño de la población. En 1980, la población se estimó en 1000 y en 1990 en 1700.

(a) Escriba la ecuación diferencial para P en el instante t con las dos condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) ¿Cuándo llegará a 4000 la población de lobos?

37. En $t = 0$, una pelota se deja caer desde una altura de 16 pies. Si pega con el piso y rebota a una altura de 9 pies (véase la figura 4):

(a) Encuentre una fórmula de dos partes para la velocidad $v(t)$ que sea válida hasta que la pelota choque con el piso por segunda ocasión.

(b) ¿Cuáles son los dos instantes en que la pelota estuvo a una altura de 9 pies?

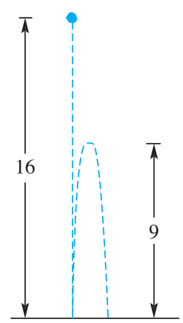


Figura 4

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** ecuación diferencial **2.** función **3.** separar las variables **4.** $-32t + v_0$; $-16t^2 + v_0 t + s_0$

3.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Una función continua definida en un intervalo cerrado debe alcanzar un valor máximo en ese intervalo.

2. Si una función derivable f alcanza un valor máximo en un punto interior c de su dominio, entonces $f'(c) = 0$.

3. Para una función es posible tener un número infinito de puntos críticos.

4. Una función continua que es creciente en $(-\infty, \infty)$ debe ser diferenciable en todas partes.

5. Si $f(x) = 3x^6 + 4x^4 + 2x^2$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en toda la recta real.

6. Si f es una función creciente y derivable en un intervalo I, entonces $f'(x) > 0$ para toda x en I.

7. Si $f'(x) > 0$, para toda x en I, entonces f es creciente en I.

8. Si $f''(c) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$.

9. Una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

10. Si $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo sobre $[a, b]$ en b.

11. La función $y = \tan^2 x$ no tiene valor mínimo.

12. La función $y = 2x^3 + x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

13. La función $y = 2x^3 + x + \tan x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

14. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

15. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ tiene un asíntota horizontal en $y = -1$.

16. La gráfica de $y = \dfrac{3x^2 + 2x + \operatorname{sen} x}{x}$ tiene una asíntota oblicua en $y = 3x + 2$.

17. La función $f(x) = \sqrt{x}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 2]$.

18. La función $f(x) = |x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-1, 1]$.

19. En el intervalo $[-1, 1]$, sólo existe un punto en donde la recta tangente a $y = x^3$ es paralela a la recta secante.

20. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces f es constante en este intervalo.

21. Si $f'(c) = f''(c) = 0$, entonces $f(c)$ no es valor máximo ni valor mínimo.

22. La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ tiene un número infinito de puntos de inflexión.

23. Entre todos los rectángulos con área fija K, aquel con perímetro máximo es un cuadrado.

24. Si la gráfica de una función derivable tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en donde la recta tangente es horizontal.

25. La suma de dos funciones crecientes es una función creciente.

26. El producto de dos funciones crecientes es una función creciente.

27. Si $f'(0) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x \geq 0$, entonces f es creciente en $[0, \infty)$.

28. Si $f'(x) \leq 2$ para toda x en el intervalo $[0, 3]$ y $f(0) = 1$, entonces $f(3) < 4$.

29. Si f es una función derivable, entonces f es no decreciente en (a, b), si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en (a, b).

30. Dos funciones derivables tienen la misma derivada en (a, b) si y sólo si difieren por una constante en (a, b).

31. Si $f''(x) > 0$ para toda x, entonces la gráfica de $y = f(x)$ no puede tener una asíntota horizontal.

32. Un valor máximo global siempre es un valor máximo local.

33. Una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, puede tener, a lo más, un valor máximo local en cualquier intervalo abierto.

34. La función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene valor mínimo en ningún intervalo abierto.

35. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces $f(x) = 0$ tiene una raíz entre a y b.

36. Una de las virtudes del método de bisección es su rápida convergencia.

37. El método de Newton producirá una sucesión convergente para la función $f(x) = x^{1/3}$.

38. Si el método de Newton no converge para un valor inicial, entonces no convergerá para todo valor inicial.

39. Si g es continua en $[a, b]$ y si $a < g(a) < g(b) < b$, entonces g tiene un punto fijo entre a y b.

40. Una de las virtudes del método de bisección es que siempre converge.

41. La integral indefinida es un operador lineal.

42. $\displaystyle\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x) + C.$

43. $y = \cos x$ es una solución para la ecuación diferencial $(dy/dx)^2 = 1 - y^2$.

44. Todas las funciones que son antiderivadas deben tener derivadas.

45. Si la segunda derivada de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren a lo más por una constante.

46. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x)$ para cada función derivable f.

47. Si $s = -16t^2 + v_0 t$ proporciona la altura en el instante t de una pelota lanzada directamente hacia arriba, desde la superficie de la Tierra; entonces, la pelota chocará con el suelo con velocidad $-v_0$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 12 se dan una función f y su dominio. Determine los puntos críticos, evalúe f en estos puntos y encuentre los valores máximo y mínimo (globales).

1. $f(x) = x^2 - 2x$; $[0, 4]$

2. $f(t) = \dfrac{1}{t}$; $[1, 4]$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$; $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $[-2, 0)$

5. $f(x) = |x|$; $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

6. $f(s) = s + |s|; [-1, 1]$

7. $f(x) = 3x^4 - 4x^3; [-2, 3]$

8. $f(u) = u^2(u - 2)^{1/3}; [-1, 3]$

9. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7; [-1, 3]$

10. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2; [-2, 2]$

11. $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta; [\pi/4, 4\pi/3]$

12. $f(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta; [0, \pi]$

En los problemas del 13 al 19 se da una función f con dominio $(-\infty, \infty)$. Indique en dónde f es creciente y en dónde es cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = 3x - x^2$

14. $f(x) = x^9$

15. $f(x) = x^3 - 3x + 3$

16. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 1$

17. $f(x) = x^4 - 4x^5$

18. $f(x) = x^3 - \frac{6}{5}x^5$

19. $f(x) = x^3 - x^4$

20. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función g, definida mediante $g(t) = t^3 + 1/t$. Encuentre los valores extremos locales de g. Asimismo, encuentre el punto de inflexión. Haga un bosquejo de la gráfica.

21. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función f, definida por $f(x) = x^2(x - 4)$. Encuentre los valores extremos locales de f. También encuentre el punto de inflexión. Dibuje la gráfica.

22. Encuentre los valores máximo y mínimo, si existen, de la función definida por

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1} + 2$$

En los problemas del 23 al 30 bosqueje la gráfica de la función f dada, marque todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión y muestre las asíntotas, si las hay. Asegúrese de utilizar f' y f''.

23. $f(x) = x^4 - 2x$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

25. $f(x) = x\sqrt{x - 3}$

26. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

27. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

29. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$

30. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$

En los problemas del 31 al 36 haga la gráfica de la función f en la región $(-\pi, \pi)$, a menos que se indique lo contrario, etiquete todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión; también muestre las asíntotas, si existen. Asegúrese de utilizar f' y f''.

31. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x - \tan x$

33. $f(x) = x\tan x; (-\pi/2, \pi/2)$

34. $f(x) = 2x - \cot x; (0, \pi)$

35. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x$

36. $f(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} x$

37. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-2) = 3, F(2) = -1$;

(c) $F'(x) = 0$ para $x > 2$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < 2$.

38. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-1) = 6, F(3) = -2$;

(c) $F'(x) < 0$ para $x < -1, F'(-1) = F'(3) = -2, F'(7) = 0$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < -1, F''(x) = 0$ para $-1 < x < 3$, $F''(x) > 0$ para $x > 3$.

39. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) F tiene periodo π;

(c) $0 \le F(x) \le 2, F(0) = 0, F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;

(d) $F'(x) > 0$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, F'(x) < 0$ para $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$;

(e) $F''(x) < 0$ para $0 < x < \pi$.

40. Una larga hoja de metal, de 16 pulgadas de ancho, se dobla hacia arriba en ambos lados para formar un canalón horizontal con lados verticales. ¿Cuántas pulgadas de cada lado deben doblarse hacia arriba para maximizar la capacidad de carga?

41. Una barda, de 8 pies de altura, es paralela a un muro de un edificio y a un pie de éste. ¿Cuál es el tablón más corto que puede pasar por encima de la barda, desde el nivel del piso, para apuntalar el muro?

42. Una página de un libro contiene 27 pulgadas cuadradas de impresión. Si los márgenes superior, inferior y de uno de los lados son de 2 pulgadas y el margen del otro lado es de 1 pulgada, ¿qué tamaño de página utilizaría la menor cantidad de papel?

43. Un abrevadero metálico con extremos semicirculares iguales, sin cubierta superior, debe tener una capacidad de 128π pies cúbicos (véase la figura 1). Determine su radio r y longitud h, si el abrevadero debe requerir la menor cantidad de material para su construcción.

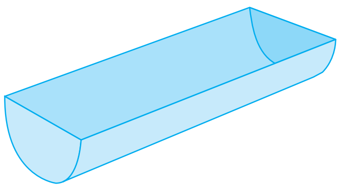


Figura 1

44. Encuentre el máximo y el mínimo de la función definida en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 8), & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{1}{6}(x^2 + 4x - 12), & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Determine en dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Haga un bosquejo de la gráfica.

45. Para cada una de las siguientes funciones decida si se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo I que se indica. Si es así, encuentre todos los valores posibles de c, si no, diga por qué. Haga un bosquejo.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}; I = [-3, 3]$

(b) $F(x) = x^{3/5} + 1; I = [-1, 1]$

(c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}; I = [2, 3]$

46. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de inflexión de la gráfica de

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 1$$

47. Sea f una función continua con $f(1) = -1/4, f(2) = 0$ y $f(3) = -1/4$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 2, haga un bosquejo de una posible gráfica de $y = f(x)$.

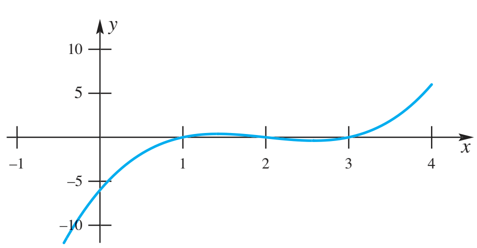


Figura 2

48. Bosqueje la gráfica de una función G con todas las propiedades siguientes:

(a) $G(x)$ es continua y $G''(x) > 0$ para toda x en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(b) $G(-2) = G(2) = 3$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 2, \lim\limits_{x\to\infty} [G(x) - x] = 0$;

(d) $\lim\limits_{x\to0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to0^-} G(x) = \infty$.

$\boxed{C}$ **49.** Utilice el método de bisección para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $a_1 = 0$ y $b_1 = 1$.

$\boxed{C}$ **50.** Utilice el método de Newton para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $x_1 = 0.5$.

$\boxed{C}$ **51.** Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver $3x - \cos 2x = 0$; inicie con $x_1 = 0.5$.

$\boxed{C}$ **52.** Utilice el método de Newton para resolver $x - \tan x = 0$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ con una precisión de cuatro decimales. *Sugerencia:* Bosqueje las gráficas de $y = x$ y $y = \tan x$, usando los mismos ejes para obtener una buena aproximación inicial para x_1.

En los problemas del 53 al 67 evalúe las integrales que se indican.

53. $\displaystyle\int \left(x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}\right) dx$

54. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{y^3 - 9y \operatorname{sen} y + 26y^{-1}}{y}\, dy$

56. $\displaystyle\int y\sqrt{y^2 - 4}\, dy$

57. $\displaystyle\int z(2z^2 - 3)^{1/3}\, dz$

58. $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$

59. $\displaystyle\int (x + 1)\tan^2(3x^2 + 6x)\sec^2(3x^2 + 6x)\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 9}}\, dt$

61. $\displaystyle\int t^4(t^5 + 5)^{2/3}\, dt$

62. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$

63. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 9}}\, dx$

64. $\displaystyle\int \frac{1}{(y + 1)^2}\, dy$

65. $\displaystyle\int \frac{2}{(2y - 1)^3}\, dy$

66. $\displaystyle\int \frac{y^2 - 1}{(y^3 - 3y)^2}\, dy$

67. $\displaystyle\int \frac{(y^2 + y + 1)}{\sqrt[5]{2y^3 + 3y^2 + 6y}}\, dy$

En los problemas del 68 al 74 resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición que se indica.

68. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x;\ y = 2$ en $x = 0$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}};\ y = 18$ en $x = 3$

70. $\dfrac{dy}{dx} = \csc y;\ y = \pi$ en $x = 0$

71. $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2t-1};\ y = -1$ en $t = \frac{1}{2}$

72. $\dfrac{dy}{dt} = t^2y^4;\ y = 1$ en $t = 1$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x - x^3}{2y};\ y = 3$ en $x = 0$

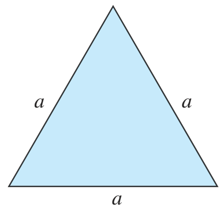
74. $\dfrac{dy}{dx} = x \sec y;\ y = \pi$ en $x = 0$

75. Se lanza una pelota directamente hacia arriba desde una torre de 448 pies de altura, a una velocidad inicial de 48 pies por segundo. ¿En cuántos segundos chocará con el piso y a qué velocidad? Suponga que $g = 32$ pies por segundo por segundo y no tome en cuenta la resistencia del aire.

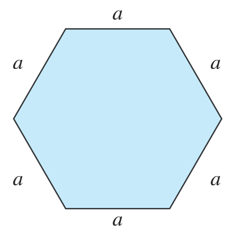
PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 12 determine el área de la región sombreada.

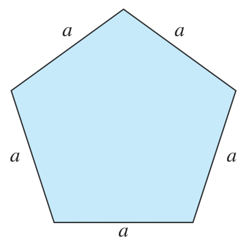
1.



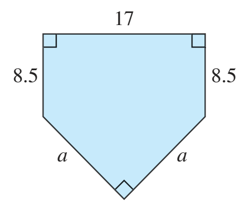
2.



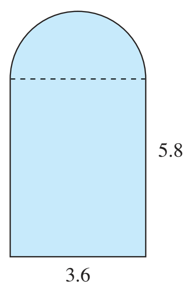
3.



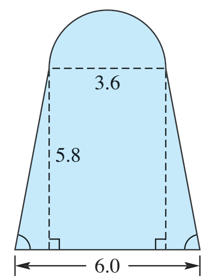
4.



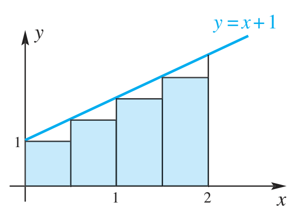
5.



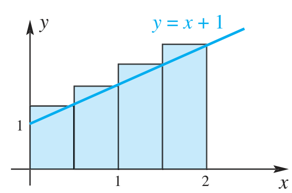
6.



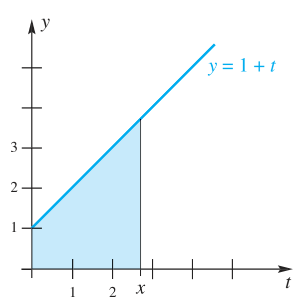
7.



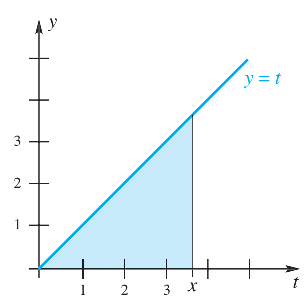
8.



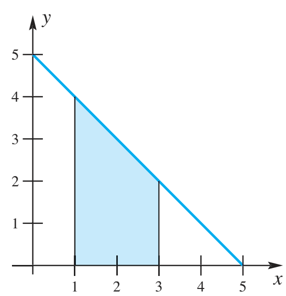
9.



10.



11.



12.